2011/12/19 出題

電磁気学 I (田中担当クラス) レポート問題

提出期限: 1/16 の授業時に集める.

1. 以下の等式を示せ．ただし，f はスカラー場，$\boldsymbol{A}$ はベクトル場である．

   (a) $\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{A}) = f\,\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{\nabla} f$

   (b) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A}$

2. z 軸に沿って線状に電荷が分布している．$z > 0$ で電荷の線密度は λ(正の定数) で，$z < 0$ で $-\lambda$ である．系は軸対称であるから，y-z 平面で考えれば充分で，このとき電場の x 成分はゼロ，すなわち $E_x(0, y, z) = 0$ である．

   (a) 電場の y 成分 $E_y(0, y, z)$，z 成分 $E_z(0, y, z)$ を求めよ．

   (b) 電場の大きさが z 軸からの距離のみに依ることを示せ．

   (c) 電気力線を用いて電場の様子を簡単に図示せよ．

3. 球対称な静電ポテンシャル $\phi = \phi(r)$, $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を考える．このとき，電場 $\boldsymbol{E}$ は,

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}\,\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \hat{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{r}\,,$$

   となることを示せ.

4. 静電ポテンシャルが $\phi(r) = Ae^{-r/a}/(4\pi\varepsilon_0 r)$ で与えられるような静電場がある．A，a は定数で，$a > 0$ とする．

   (a) ポアッソン方程式を用いて原点以外での電荷分布を求めよ．(ヒント: ポテンシャルが球対称であるから，球対称な場合のポアッソン方程式を用いればよい．)

   (b) 問 3 の結果を用いて，原点以外での電場を求めよ．

5. z 軸を法線とする半径 a の円電流が 2 つあり，それぞれ中心が $(0, 0, b/2)$, $(0, 0, -b/2)$ である ($b > 0$ とする)．また，電流の向きはどちらも z 軸について右ねじの方向で，その大きさを $I(> 0)$ とする．

   (a) z 軸上の磁場を求めよ．

   (b) $b \ll a$ の場合と，$a \ll b$ の場合について，$B_z(z)$ の概形を示せ.

   (c) $z = 0$ の付近で $B_z(z)$ ができるだけ一定になるような a と b の関係を求めよ．このようにコイルを並べたものをヘルムホルツコイルという．(ヒント: $B_z(z)$ をテイラー展開して z^2 の係数がゼロになるようにすればよい．)