

2.5 ガウス (Gauss) の法則

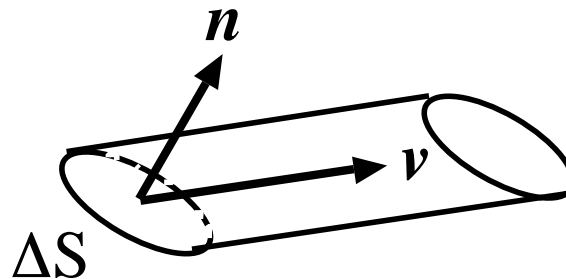
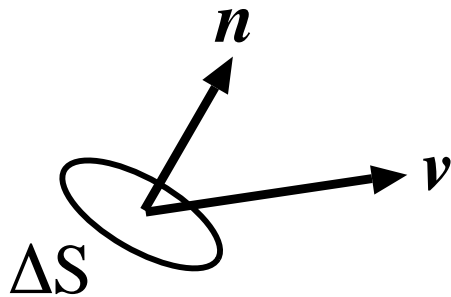
2.5.1 ベクトル場の面積分と流束 (flux)

各点での速度が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ (ベクトル場) で与えられるような流体を考える。

小さな面 ΔS を考え、その法線方向の単位ベクトルを \boldsymbol{n} とする。
単位時間に ΔS を通って流れる流体の量は、 v_n を \boldsymbol{v} の \boldsymbol{n} 方向成分として、

$$(1) \quad v_n \Delta S = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S = \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{n} \Delta S \equiv \Delta \boldsymbol{S}.$$

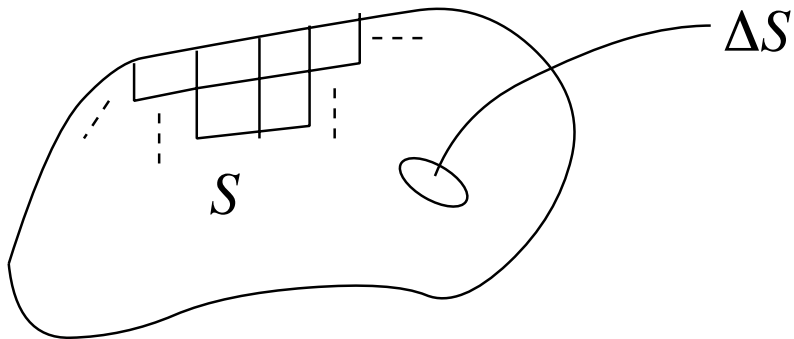
となる。



一般の面 S について，単位時間に S を通って流れる流体の量は， S を多数の小さな面 ΔS_i に分割して考えれば，

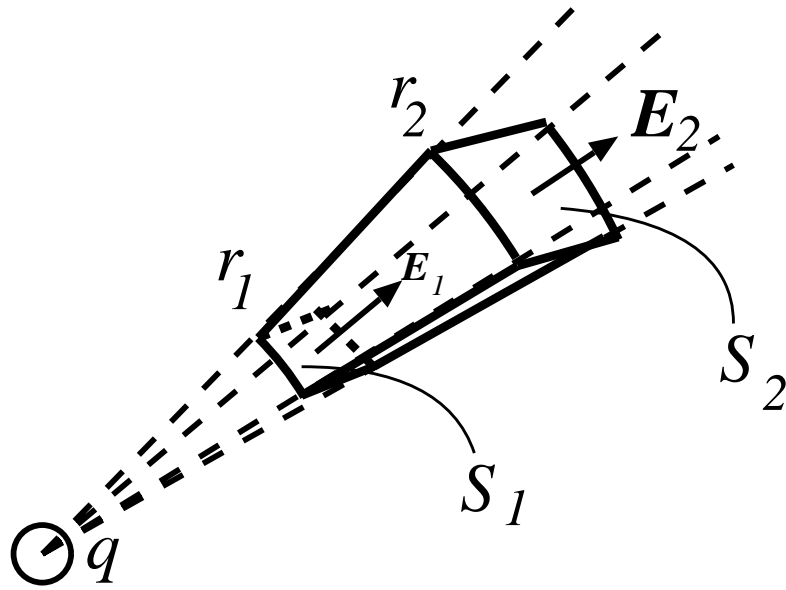
$$(2) \quad \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

これを S を通る流束 (flux) とする。



2.5.2 ガウスの法則 (積分形)

- 流束の考え方を電場にも当てはめてみる。
(実際には何も流れていないけれども.)
- 正の点電荷 q が 1 個ある場合.



図のような半径 r_1 と r_2 の球面の一部分で挟まれた領域の表面 S (閉曲面) を考える.

$$(3) \quad S = S_1 + S_2 + \text{側面}$$

側面を通る電場は明らかにゼロ.

$$(4) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

閉曲面の場合，法線ベクトルは外向きにとる．

$$(5) \quad \int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} \int_{S_1} dS$$

$$(6) \quad \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2^2} \int_{S_2} dS$$

$$(7) \quad \frac{\int_{S_1} dS}{\int_{S_2} dS} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

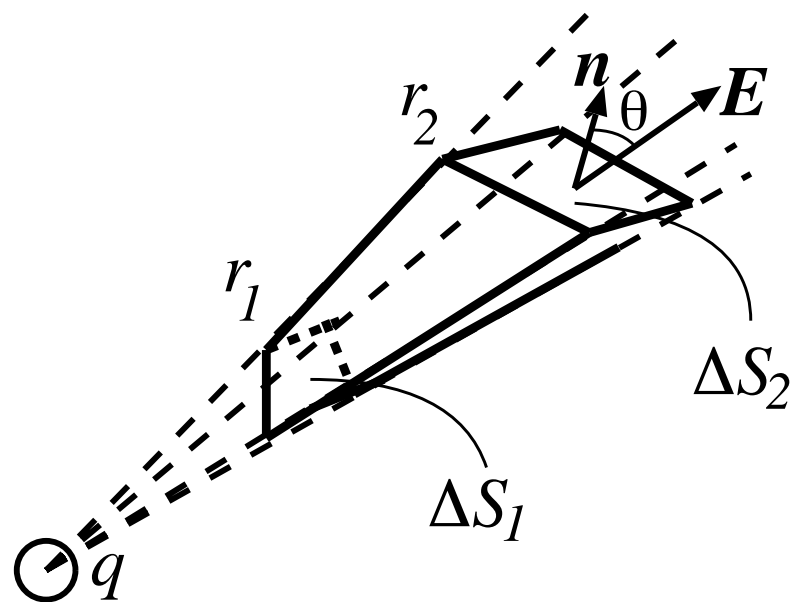
ゆえ，

$$(8) \quad -\int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

すなわち，

$$(9) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

次に，中心部分の角度が小さいとして，
 S_1 ， S_2 が動径について“傾いて”いる場合を考えよう．

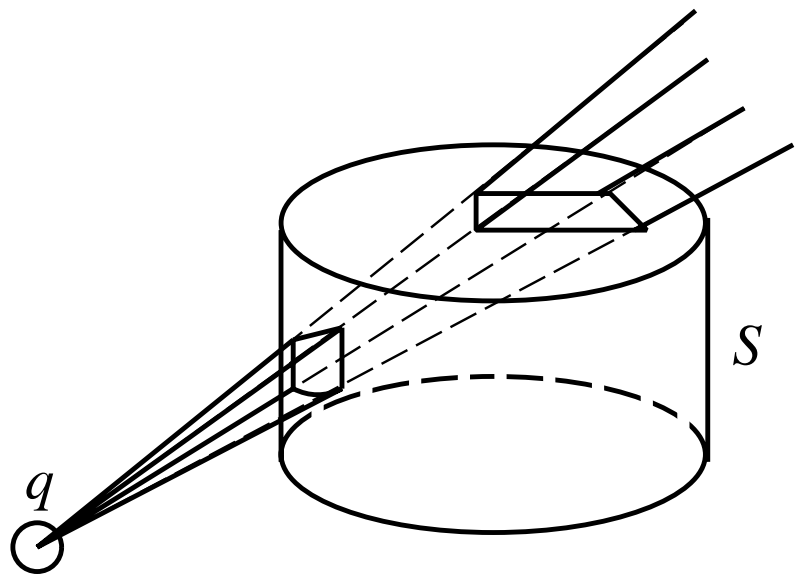


ΔS_i の面積は傾いていないときの $1/\cos\theta$ 倍になる． ΔS_i は小さいから E の値はその上で一定とみなせ， E の法線成分は $E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E \cos\theta$.
 よって，

$$(10) \quad -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}_1 = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}_2$$

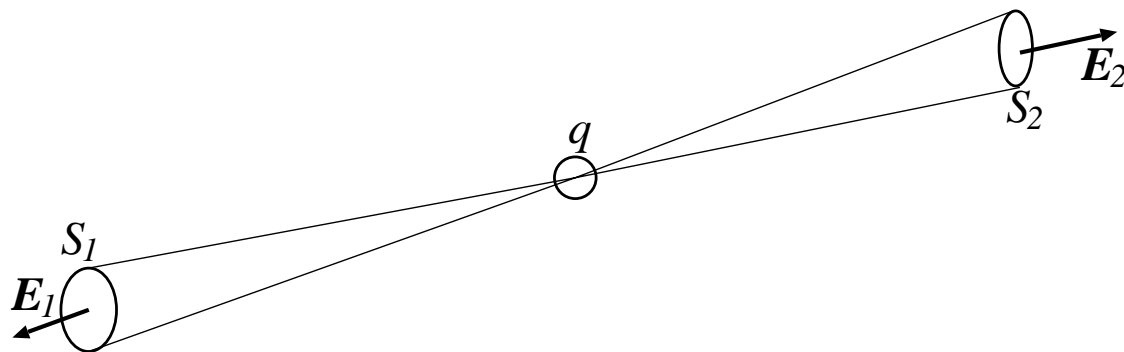
式 (9) が成り立つ．

内部に電荷 q を含まないような一般の閉曲面 S についても、
図のような小錐体の集まりを考えれば、
下面と上面で流束は打ち消し合う。

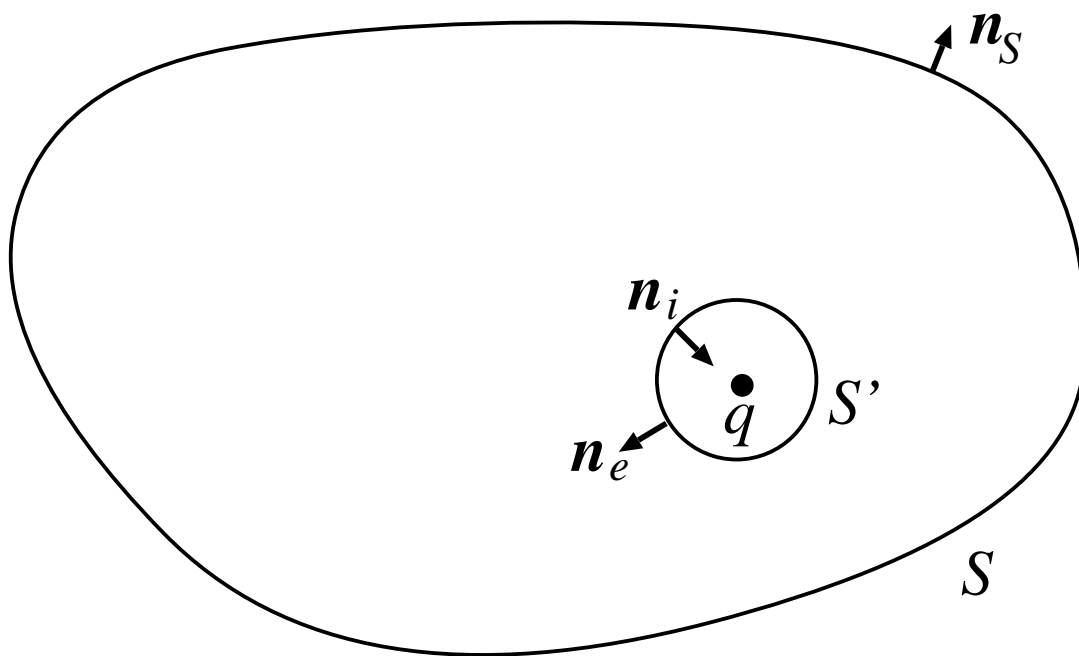


$$(11) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad S \text{ は } q \text{ を含まない閉曲面.}$$

S が q をその内部に含む場合, 明らかに S_1 と S_2 の寄与は打ち消さない.



そこで, q を囲む小さな面 S' を考え, S の内部から S' の内部を取り除く.



この S と S' に挟まれた領域については, (q を含まないから)

$$(12) \quad \int_{S+S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

が成り立つ. (このとき, S' の法線ベクトルは内向きの n_i .)
 S' の法線ベクトルを外向きの n_e にとることにすれば,

$$(13) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

(すなわち, S を通る流束は S' を通る流束に等しい.)
 S' の形は任意だから, 半径 r の球面を考えることにすると,

$$(14) \quad \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} (= N \leftarrow \text{電気力線の本数}).$$

(うまく, r に依らない数になっている.)

式 (13) より ,

$$(15) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad S \text{ は } q \text{ を含む閉曲面.}$$

まとめると ,

$$(16) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0, & q \text{ が } S \text{ の外部にあるとき} \\ q/\epsilon_0, & q \text{ が } S \text{ の内部にあるとき} \end{cases}$$

(S は任意の閉曲面 .)

- 点電荷が複数あるとき .

$$(17) \quad \mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$$

から ,

$$(18) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i \in \text{内部}} \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0},$$

$$Q_{\text{int.}} \equiv \sum_{i \in \text{内部}} q_i = S \text{ の内部にある電荷の和.}$$

- 連続的な電荷分布の場合。(和を積分に置き換えればよい.)

$$(19) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0}, \quad Q_{\text{int.}} \equiv \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

ただし, V は S の内部の領域.

- まとめ

積分形のガウスの法則

$$(20) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} \quad Q_{\text{int.}} \equiv S \text{ の内部の電荷}$$

$1/r^2$ 則の帰結

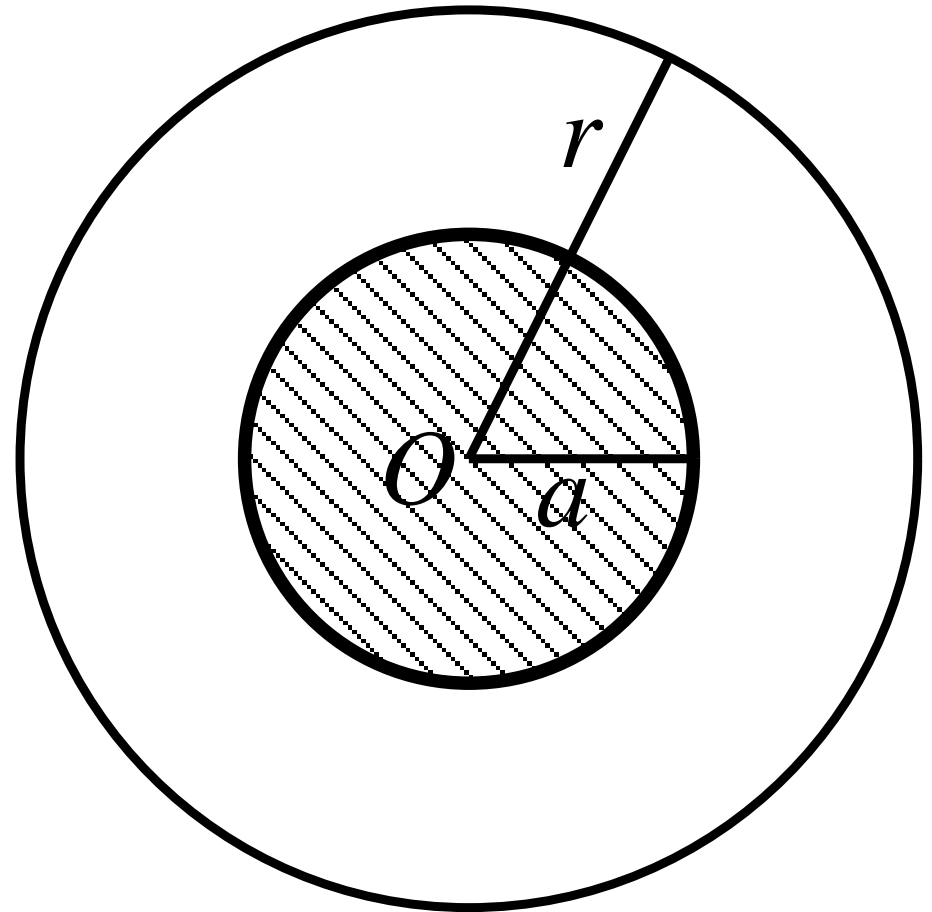
- 例 1: 一様な球状電荷分布

原点 O を中心とする半径 a の球の内部に電荷が一様に分布しているとする. 全電荷を Q , $r \leq a$ での電荷 (体積) 密度を ρ とすると,

$$(21) \quad Q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho.$$

中心 O , 半径 $r (> a)$ の球面を S としてガウスの法則を適用すると,

$$(22) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



対称性から， $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は動径方向を向き， S 上では一定の大きさ $E(r)$ を持つから，

$$(23) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r)$$

よって，

$$(24) \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad r > a.$$

(中心に点電荷 Q があるときと同じ.)

$r < a$ のときは，ガウスの法則は，

$$(25) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

左辺は上と同じで，

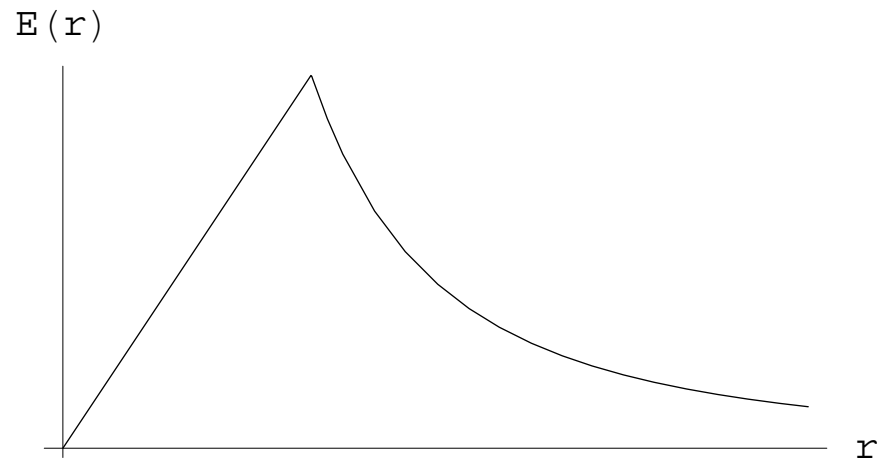
$$(26) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r).$$

よって,

$$(27) \quad E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r.$$

まとめると,

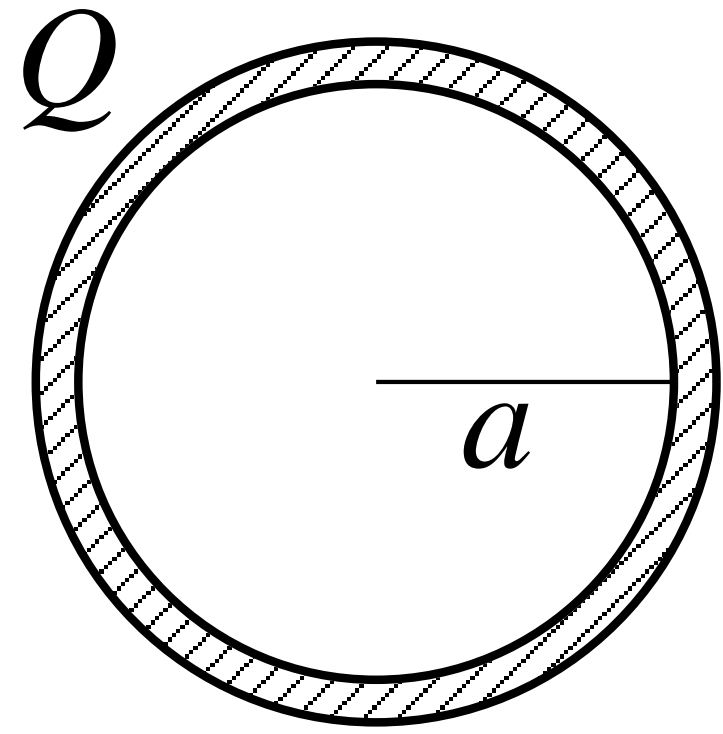
$$(28) \quad E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3}, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, & r > a \end{cases}$$



- 半径 a のうすい球殻上に一様に分布した電荷の場合は,

$$E(r) = \begin{cases} \square, & r < a \\ \square, & r > a \end{cases}$$

となる。(全電荷 Q .)



● 例 2: 一様な直線状電荷分布 (cf. §§ 2. 3. 3 例 2)

電荷の線密度を λ とし, 直線電荷を中心とする半径 R , 長さ L の円柱の表面 S を考える. $E(\mathbf{r})$ は中心軸に垂直で, 軸対称性より, 中心軸からの距離 R のみの関数のはず. ガウスの法則より,

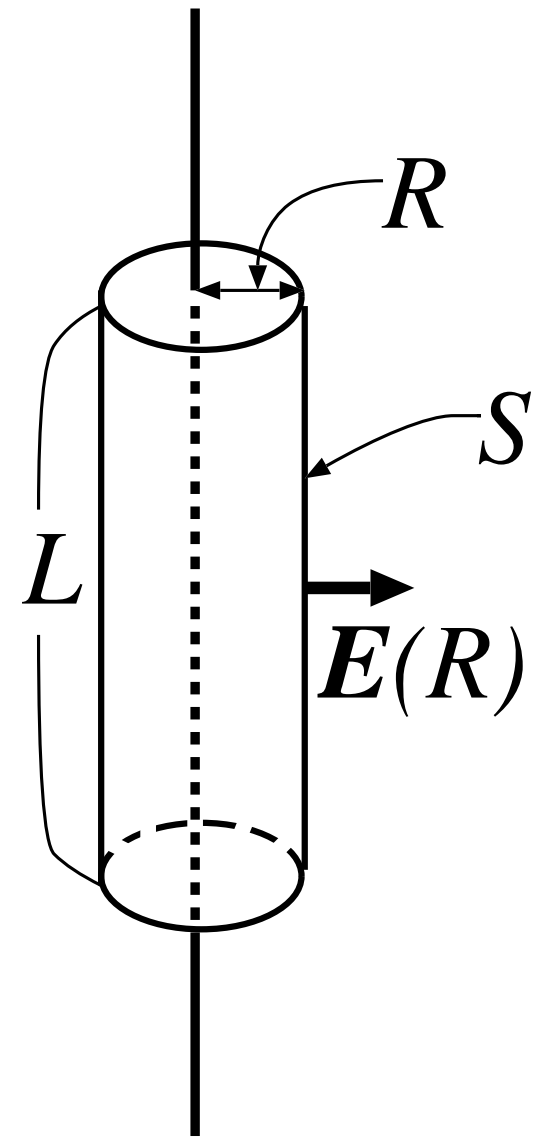
$$(29) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0},$$

$$\text{左辺} = E(R) \int_{S \text{ の側面}} dS = 2\pi R L E(R).$$

よって,

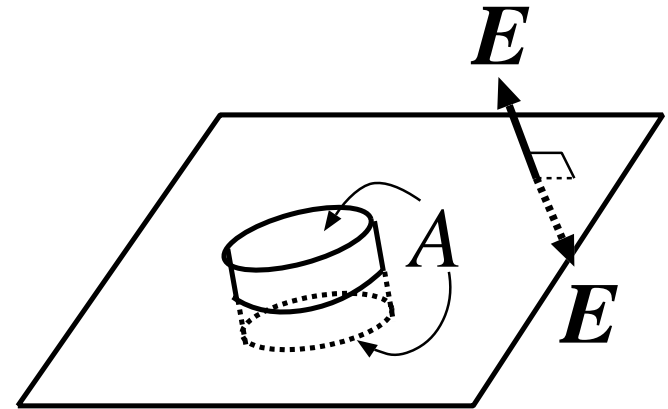
$$(30) \quad E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

(§§ 2. 3. 3 例 2 と同じ結果).



- 例 3: 一様な平面状電荷分布

無限に広い一様な平面電荷分布 (電荷の面密度 σ) を考える . 電場は面に垂直で面の上下で反対向き . また , 面上の位置に依らない . 面を垂直に貫く円柱 (底面積 A) を考え , その表面 S についてガウスの法則を用いると ,



$$(31) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} .$$

側面は積分に寄与しないから , 底面での電場の大きさを E とすれば ,

$$(32) \quad E A(\text{上面}) + E A(\text{下面}) = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} .$$

よって,

$$(33) \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

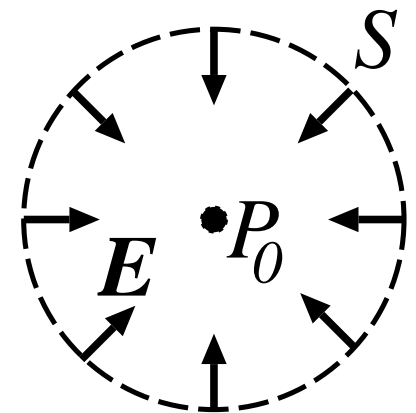
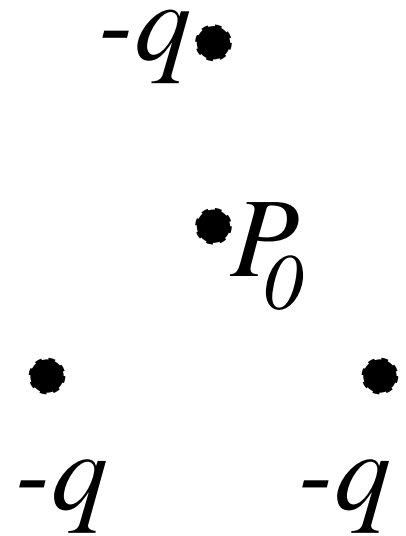
面からの距離にも依らない一様な場.

- 静電場内での釣り合い

静電場内でクーロン力が釣り合う点 P_0 を考える．このような点が安定かどうか，すなわち，この点に正の試験電荷 (test charge, 静電場を変えないような仮想的な点電荷) を置き，すこし位置をずらしたときに復元力が働くかどうか，を考える． P_0 を囲む仮想的な小さな面 S を考えると，もし P_0 が安定な釣り合い点ならば， S 上では常に P_0 方向 (内向き) の電場 E があるはず．このとき，

$$(34) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} < 0.$$

つまり，ガウスの法則より S 内には負の電荷がなければならない． S を無限小にとると， P_0 に負の電荷がなければならない．従って，電荷のない場所では安定な釣り合い点はない．



$E = -\nabla\phi$ であったから，安定な釣り合いの点 P_0 では， $E = -\nabla\phi = 0$ で， ϕ は極小値または極大値をとる．

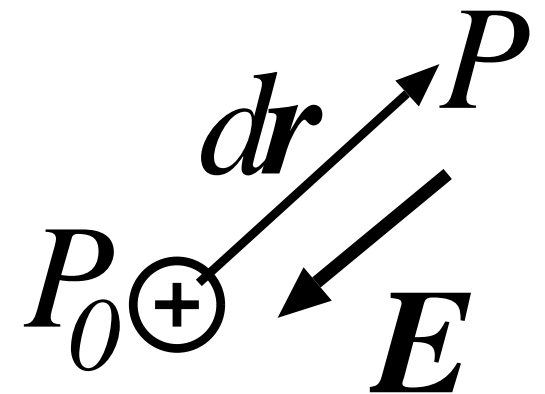
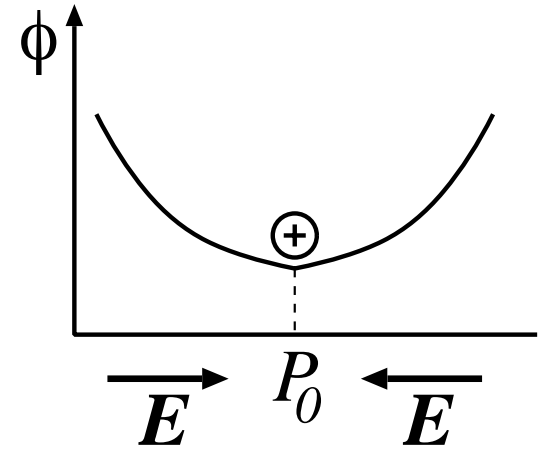
あるいは， $\phi(P) = -\int_{P_0}^P E \cdot dr$ で，安定な釣り合いの点からどの方向に向かってこの積分をしても， P_0 の近傍では ϕ は増えるだけか減るだけである．

$$E \cdot dr < 0 \Rightarrow \phi(P) > 0.$$

($\phi(P_0) = 0$ とした．)

つまり，安定な釣り合いの点では極小値または極大値をとる．

電荷のない場所では安定な釣り合いの点がないということは，ポテンシャルの言葉でいうと，
電荷のない領域ではポテンシャルは極小値も極大値もとらない，
ということになる．



2.5.3 ガウスの法則 (微分形)

- ベクトル場の発散

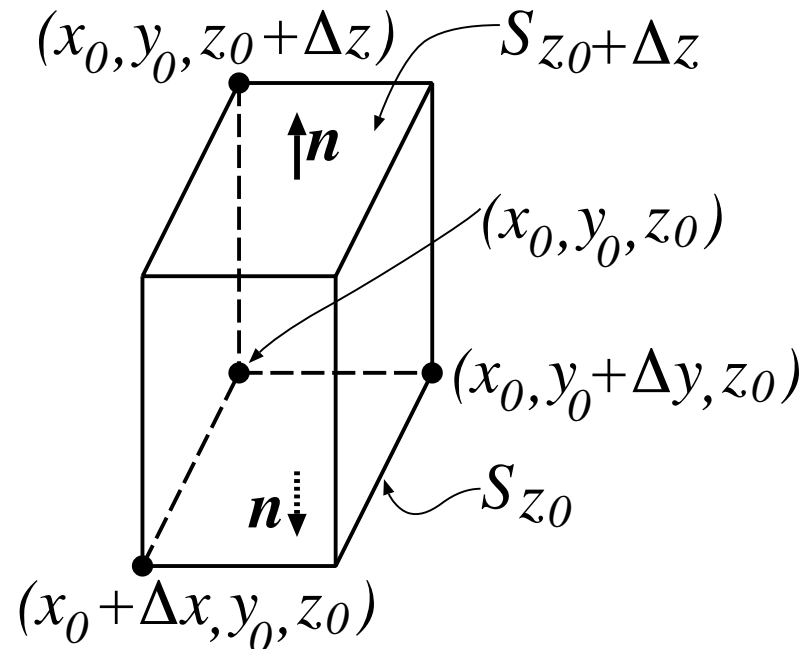
ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ について

$$(35) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) (= \operatorname{div} \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{スカラー量})$$

を \mathbf{A} の発散 (divergence) という。

- ガウスの定理

- 図のような小さい直方体 V_0 を考える。この直方体の表面 S_0 を通るベクトル場 \mathbf{A} の流束を考えよう。



まず, z 軸に垂直な面 S_{z_0} (下面) と $S_{z_0+\Delta z}$ (上面) について考える。
 S_{z_0} を通る流束は (法線ベクトルの向きに注意して),

$$(36) \quad - \int_{S_{z_0}} A_z(x, y, z_0) dx dy .$$

$S_{z_0+\Delta z}$ を通る流束は

$$(37) \quad \int_{S_{z_0+\Delta z}} A_z(x, y, z_0 + \Delta z) dx dy .$$

これらの和は (ΔV_0 を小直方体の体積として),

$$(38) \quad \int \{A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0)\} dx dy \\ \simeq \int \frac{\partial A_z(x, y, z_0)}{\partial z} \Delta z dx dy \simeq \frac{\partial A_z(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V_0 .$$

x 軸, y 軸に垂直な面についても同様。
 よって, 小直方体の表面から出る流束は,

$$(39) \quad \int_{S_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \simeq \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V_0$$

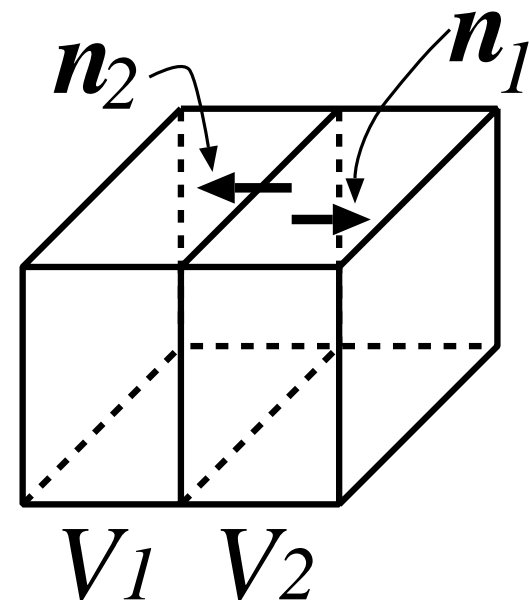
$$= (\nabla \cdot \mathbf{A})|_{\mathbf{r}=(x_0, y_0, z_0)} \Delta V_0.$$

ある点での $\nabla \cdot \mathbf{A}$ はその点の近傍での単位体積あたりの外向きの流れ (わき出し) を表わす。

○ 流束の分割: 図のような2つの小直方体 V_1, V_2 を考える。 $V_{1(2)}$ の表面 $S_{1(2)}$ の流束は,

$$(40) \quad \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_1,$$

$$(41) \quad \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_2.$$



V_1 と V_2 を合わせたものを V_{1+2} , その表面を S_{1+2} とすると ,
 V_1 と V_2 の境界面での面積分は打ち消し合うから (n が逆向き) ,

$$(42) \quad \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{1+2}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} .$$

よって ,

$$\int_{S_{1+2}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_1 + \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_2 .$$

このことから ,
一般の (小さくない) 領域 V を小直方体に分割すると ,
 V の表面を S として , (ΔV_i は i 番目の小直方体の体積)

$$(43) \quad \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (\text{体積積分})$$

- まとめると、ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ について、領域 V とその表面 S (あるいは閉曲面 S とそれに囲まれた領域 V) を考えると、

$$(44) \quad \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV$$

これを **ガウスの定理** という。

- 微分形のガウスの法則
- 積分形のガウスの法則は

$$(45) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV .$$

これは，閉曲面 S 上の電場とその内部の電荷との関係を表わす．一般に電荷と面は離れていてもよいから (§§2.5.2 の例)，近接相互作用の考え方になっていない．

- ガウスの定理を用いると，

$$(46) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV .$$

従って，式 (45) は，

$$(47) \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV .$$

V は任意の領域だから , これが成り立つためには ,

$$(48) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \text{微分形のガウスの法則} .$$

点 r での電荷密度が同じ点 r での電場の“微分”を決定していると考えられるから , 近接相互作用の考え方になっている .
例えば , E_x の変化だけを考えると ($E_y, E_z = \text{const.}$) ,

$$(49) \quad \begin{aligned} E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z) &\simeq \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) \Delta x = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \Delta x . \end{aligned}$$

すなわち ,

$$(50) \quad E_x(x + \Delta x, y, z) \simeq E_x(x, y, z) + \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \Delta x .$$

- 例 1: §§2. 5. 2 の例 1 の電場が微分形のガウスの法則を見たしていること .

$$(51) \quad \rho(r) = \begin{cases} \rho, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$(52) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, & r > a, Q = 4\pi a^3 \rho/3 \end{cases}$$

$r < a$ では ,

$$(53) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$r > a$ では ,

$$(54) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = 0$$

ただし ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = \boxed{}$$

等を用いた .

- まとめ: 静電場の法則

$$(55) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

$$(56) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

式 (55) は ρ , \mathbf{E} が時間に依存しているときも正しい。(理由は第 5 章で.)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$