# 2.3　電場 (electric field)

## 2.3.1　クーロンの法則と電場

クーロンの法則，式 (2. 1. 3) を

(1) $$\boldsymbol{F}_{12} = q_1 \boldsymbol{E}_{12}, \quad \boldsymbol{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \hat{\boldsymbol{r}}_{12},$$

と書く．($\boldsymbol{E}_{12}$ = 電荷 $q_2$ が $\boldsymbol{r}_1$ につくる「電場」)
クーロン力についての重ね合せの原理 (式 (2. 2. 4)) より，

(2) $$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{n} q \boldsymbol{E}_i, \quad \boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\boldsymbol{r}}_i.$$

(3) $$\boldsymbol{F} = q \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

と比較して，

(4)
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}.$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は 点 $\boldsymbol{r}$ における電場 を表し，上の式は，
電場についての重ね合せの原理 を表している．
式 (2. 2. 9) に対応する式は，

(5)
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\, dV'.$$

○ 電場の単位：式 (3) より，$\boldsymbol{E}$ の単位は，

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}.$$

- 場とは何か.

(6) $$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

点 $\boldsymbol{r}$ に置かれた電荷 $q$ に働く力は，その点 ($\boldsymbol{r}$) での電場によって決定される． $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{近接相互作用}}$

(しかし，電場自身はまだ遠隔相互作用的な考え方で記述されている．式 (4))

一方，式 (2. 1. 3) では，離れた位置にある電荷から力を受けると考えている． $\Longrightarrow$ 遠隔相互作用

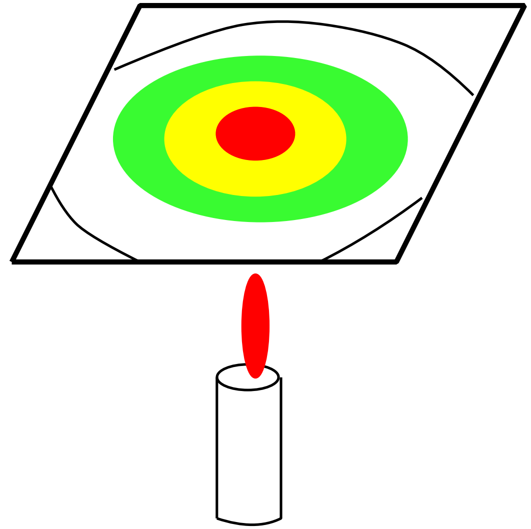
- 静電場ではどちらも同じ.
- 動的な場合 (時間的な変化がある場合) は，近接相互作用で考える方が電磁場の法則は簡単になる． この場合，電場は空間座標 ($\boldsymbol{r}$) と時間 ($t$) のベクトル関数となる．(磁場も同様．)

(7) $$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t).$$

(当面は静電場を扱うので，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$．)

○ 場の例: 温度の場

熱した鉄板の温度 $T(x, y, t)$.
各時刻に鉄板上の各点で「温度」という物理量が決まっている．鉄板は 2 次元面だから，この場は 2 次元面 (+1 次元の時間) 上の場.
図の様に「等温線」を描けば，場のイメージが掴みやすい.



大気の温度を考えると,

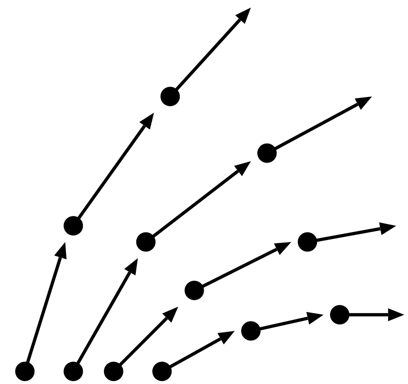
(8) $$T = T(x, y, z, t), \quad \text{(3+1) 次元時空上の場.}$$

今度は「等温面」を考えればよい.

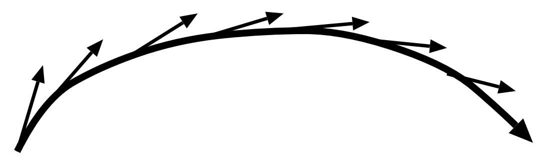
### 2.3.2　電場と電気力線

各時刻 $t$ に 3 次元空間の各点 $\boldsymbol{r}$ で「電場」という物理量が決まっている．(注: 温度の場合と異なり，電場はベクトル．) これを数学的なベクトル関数と考える．

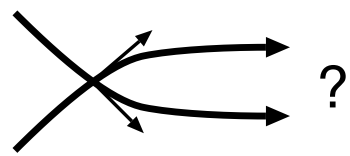
(9) $$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t).$$



● 電気力線
静電場のイメージ．
空間の各点の電場のベクトルを接ベクトルに持つような線を考える．
$\Longrightarrow$ 電気力線
○ ベクトルの向きに電気力線も向くとする．



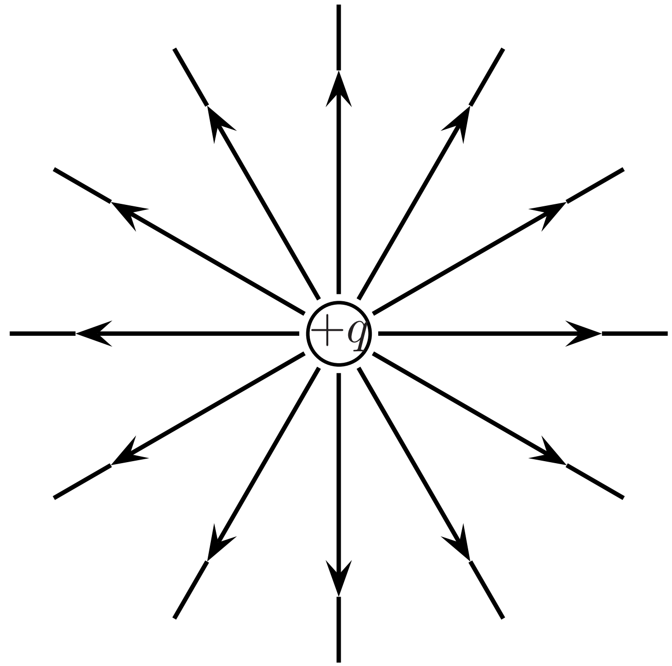
○ 空間の各点で電場のベクトルは一意的に決まっているはずだから，電気力線は交わらない．



○ 各点でベクトルの大きさ (電場の強さ) は，電気力線の面密度に比例するとする．

○ 例: 点電荷 1 つの場合

原点に置き，$q > 0$ とする．




(10) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}.$$

半径 $r$ の球面上の電場の大きさ (強さ) は,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

電気力線の面密度 $n$ はこれに比例するとしたので,

(11) $$n \propto \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

電気力線の全本数 $N$ は,

(12) $$N = 4\pi r^2 n \propto \frac{q}{\varepsilon_0}.$$ ($r$ に依らない．電荷に比例．)

比例定数を 1 にとることにすれば,

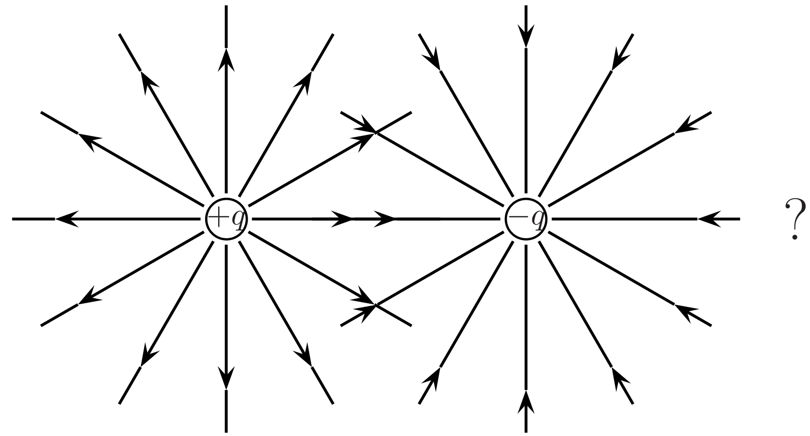
(13) $$N = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

すなわち，電荷 $q$ からは $q/\varepsilon_0$ 本の電気力線が出る．
($q < 0$ の場合は，$-q/\varepsilon_0$ 本入る．)

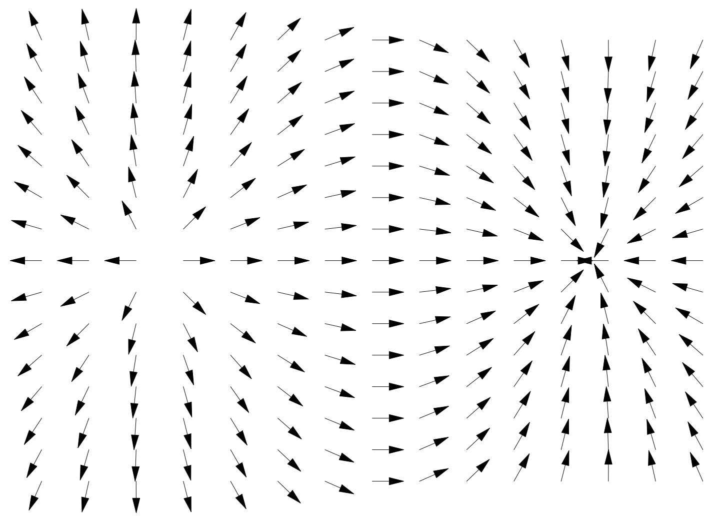
● 電気力線の欠点

○ 重ね合せの原理が使えない.

例: 2 個の点電荷 $+q, -q$.




本当は,



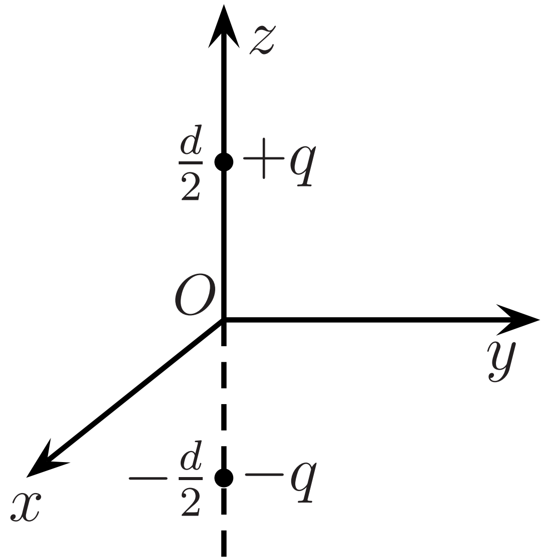
○ 時間的に変動する場を表わせない.

電荷が動いているとき，電気力線は??

## 2.3.3 電荷分布が与えられている場合の電場

- 点電荷の場合 (式 (4))

(14) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}.$$




○ 例 1: 電気双極子

電荷 1: $+q$, $\boldsymbol{r}_1 = (0, 0, d/2)$,

電荷 2: $-q$, $\boldsymbol{r}_2 = (0, 0, -d/2)$.

(15) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} - \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^3}\right]$$

$\boldsymbol{r}$ として，$z$ 軸上の点 $P(0, 0, z)$ を考える．

対称性から電場は $z$ 成分のみ持つ．

(16) $$E_z(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z-d/2}{|z-d/2|^3} - \frac{z+d/2}{|z+d/2|^3}\right].$$

十分遠方を考えることにして，$|z| \gg d$ とすると，

(17) $$E_z(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{|z|^3}\left[\frac{1-d/(2z)}{|1-d/(2z)|^3} - \frac{1+d/(2z)}{|1+d/(2z)|^3}\right]$$
$$\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{|z|^3}\left[(1-\frac{d}{2z})(1+3\frac{d}{2z}) - (1+\frac{d}{2z})(1-3\frac{d}{2z})\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{|z|^3}\frac{2d}{z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d}{|z|^3}.$$

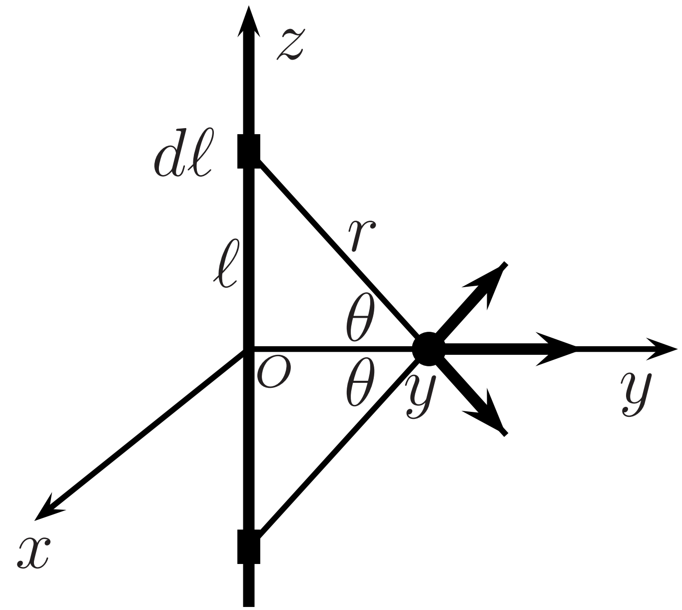
(注: $(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + O(\epsilon^2)$. )

十分遠方では，$1/|z|^3$ のように振舞う.

● 連続分布の場合

○ 例 2: 無限に長い一様に帯電した細い棒 ($z$ 軸にとる)

単位長さ当たりの電荷 (線密度) を $\lambda$ とすると，微小な長さ $d\ell$ の棒が持つ電荷は $\lambda d\ell$．$z$ 軸方向の並進対称性から，$z$ 依存性はなく，電場の $z$ 成分もない．また，$z$ 軸の周りの回転対称性から，$y$–$z$ 平面でのみ考えればよい．このとき，電場は $y$ 成分のみ．
$d\ell$ からの $E_y$ への寄与は，




(18)
$$
\begin{aligned}
dE_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\lambda d\ell = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{(y/\cos\theta)^2}\lambda d\ell \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos^3\theta}{y^2}d\ell = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{y}d\theta.
\end{aligned}
$$

($r\cos\theta = y$, $\ell/y = \tan\theta$, $d\ell = \boxed{\phantom{xxxxxx}}\, d\theta$ を用いた．)

棒全体の寄与を加えて (積分して),

(19) $$E_y(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{y}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{y}\,.$$

棒からの距離に反比例.