

# 第5章 マクスウェル方程式と電磁波

# 5.1 マクスウェル(Maxwell)方程式

## 5.1.1 電場と磁場の双対性(duality)

- これまでに分かった電磁場の基本方程式

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0,$$

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{ファラデーの法則})$$

$$(4) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}). \quad (\text{アンペールの法則})$$

- 式(1)は動的な場合も成り立つ。(理由は以下で.)

$$(5) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}.$$

- 式 (2) も同様 .

(6) 
$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 .$$

- 式 (6) は磁場に対するガウスの法則 . “磁荷” が存在しないだけ .
- 式 (3) は , 変化する磁場から電場ができることを表わしている .
- 式 (4) も式 (5) , (6) のように動的な場に拡張してみよう .

(7) 
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) . \quad (\text{誤})$$

- 電場と磁場の対応関係 (双対性) を考慮して , 式 (3) と (7) を比較してみると , (3) の右辺に (7) の電流に相当する “磁流” がないのは , (6) で “磁荷” がいないためと考えられる . (7) の右辺には , (3) の右辺のように ,  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  のような項があると推測される . (変動する電場も磁場を作るだろう .)

## 5.1.2 変位電流

式 (7) の発散を考えてみる .

$$(8) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t).$$

左辺 = 0. これは電荷保存則 (§§3. 1. 2)

$$(9) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0$$

と矛盾する . 式 (5) を用いると ,

$$(10) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

すなわち ,

$$(11) \quad \nabla \cdot \left[ \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] = 0.$$

⇒ 式 (7) で  $i \rightarrow i + \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  とすればよい。

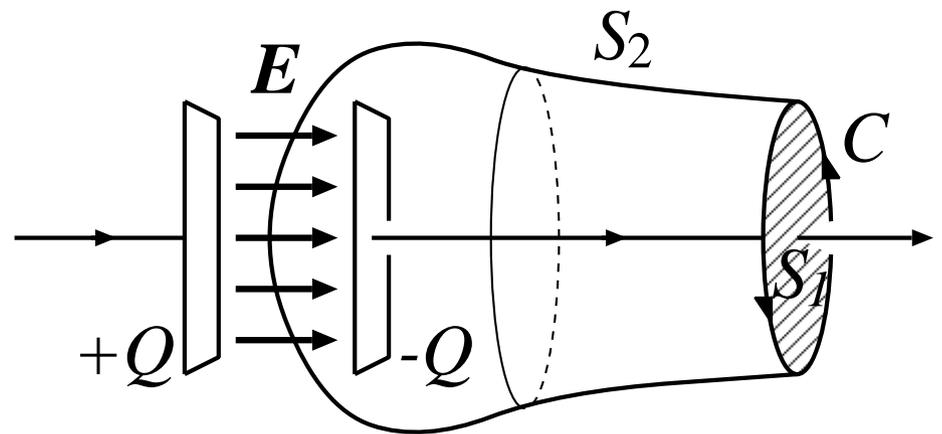
$$(12) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left[ \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \quad (\text{正})$$

## アンペール・マクスウェルの法則

$$(13) \quad \mathbf{i}_d(\mathbf{r}, t) \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \underline{\text{変位電流}}$$

### ● 例 1: コンデンサーと変位電流

平行板コンデンサーに電流  $I(t)$  が流れている。閉曲線  $C$  とそれに囲まれた面  $S_1$  を考えると、



$$(14) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

( $S_1$  には電場はないから，変位電流の寄与はない.)  
面  $S_2$  を考えると，そこには (伝導) 電流はないから，

$$(15) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

(変位電流の寄与のみ.) 極板の電荷を  $\pm Q(t)$ ，面積を  $S$  とすると，  
(式 (2. 8. 2))

$$(16) \quad E(t) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 S}.$$

$$(17) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{I}{\epsilon_0 S} \int_S dS = \mu_0 I.$$

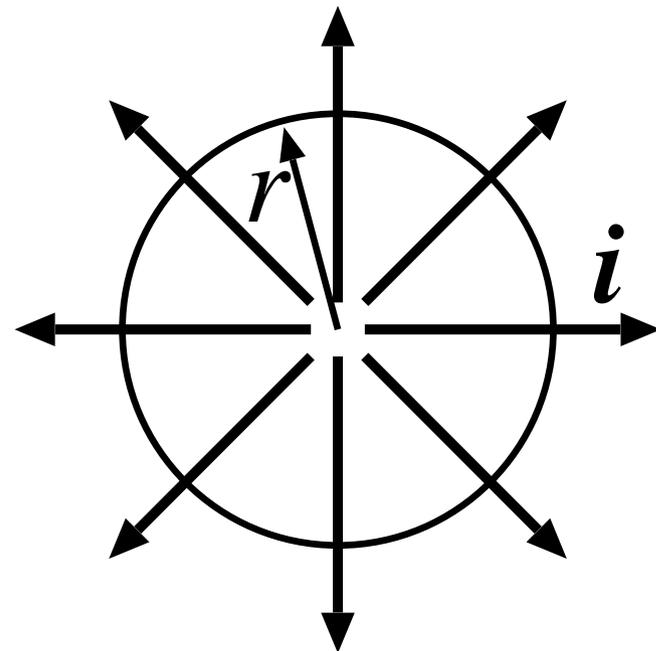
(積分は  $E$  のあるところだけ，すなわち極板間のみ.)

もし変位電流を考えないとこれはゼロになり，式 (14) と矛盾．

● 例 2: 球対称で放射状の電流  
半径  $r$  の球面  $S$  を考える．この内部の電荷を  $Q(r, t)$  とすると，

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial t} Q(r, t) = -4\pi r^2 i(r).$$

$S$  上の閉曲線  $C$  を考える． $S_C$  を  $C$  に囲まれた面として，



$$\begin{aligned} (19) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \mu_0 \int_{S_C} \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 \int_{S_C} \left[ i(r) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right) \right] dS \\ &= \mu_0 \int_{S_C} \left[ i(r) + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t} \right] dS = 0 \end{aligned}$$

磁場 (の循環) はできない。

### 5.1.3 マクスウェル方程式

- 電磁気学の基本方程式をまとめると ,

$$(20) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} ,$$

$$(21) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 ,$$

$$(22) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) ,$$

$$(23) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) .$$

これらをまとめてマクスウェルの方程式という . これとローレンツ力

$$(24) \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

が電磁気学の基本法則となる .

- マクスウェルの方程式に解はあるか？

$$\left( \begin{array}{ll} \text{未知関数} & E, B \quad 6 \text{ 個} \\ \text{方程式の数} & 8 \text{ 個} \end{array} \right)$$

- 式 (23) の発散を考えると，

$$(25) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

左辺 = 0 . また , 電荷保存則から  $\nabla \cdot \mathbf{i} = -\partial \rho / \partial t$  . よって ,

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0.$$

従って ,  $t = t_0$  で  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0) = \rho(\mathbf{r}, t_0) / \varepsilon_0$  が成り立てば , 任意の時刻  $t$  で式 (20) が成り立つ . すなわち , 式 (20) は初期条件として要求するだけでよい . (これが式 (1)  $\Rightarrow$  式 (5) の理由 . )

- 同様に式 (22) の発散を考えると ,

$$(27) \quad 0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} .$$

$t = t_0$  で  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) = 0$  なら , 任意の  $t$  で  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$  .

- 式 (20) と式 (21) が初期条件として成り立っていれば , 式 (22) と式 (23) で決定される  $\mathbf{E}$  ,  $\mathbf{B}$  の時間発展で式 (20) , 式 (21) が成り立たなくなるようなことはない .
- つまり , 式 (20) , 式 (21) は補助的な方程式で ,  $\mathbf{E}$  ,  $\mathbf{B}$  (6 つの未知関数) の時間発展は式 (22) , 式 (23) (6 つの方程式) で記述される .