

3.3 定常電流のつくる磁場とベクトルポテンシャル

3.3.1 ビオ-サバル (Biot-Savart) の法則

- 定常電流密度 $i(\mathbf{r})$ のつくる磁場は,

$$(1) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad \text{ビオ-サバルの法則}$$

$$(2) \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} : \quad \text{真空の透磁率.}$$

cf. クーロンの法則, 式 (2. 3. 5) .

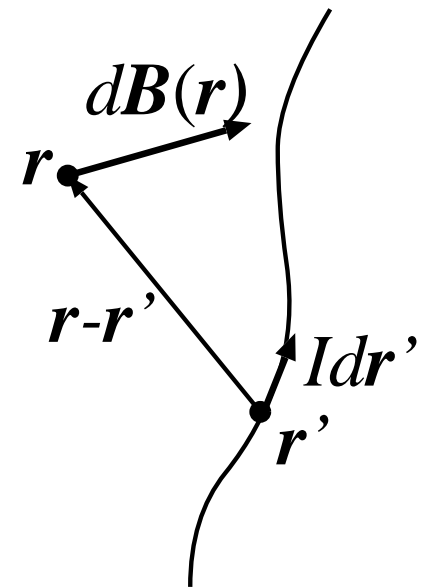
$$(\mu_0 \varepsilon_0 = \mu_0 / (4\pi) \times 4\pi \varepsilon_0 = 10^{-7} / (10^{-7} c^2) = 1/c^2)$$

- 細い一様な導線 (回路: C) を流れる電流の場合 .
断面の積分を実行して (式 (3. 1. 20)) ,

$$(3) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} .$$

電流素片のつくる磁場は ,

$$(4) \quad d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} .$$

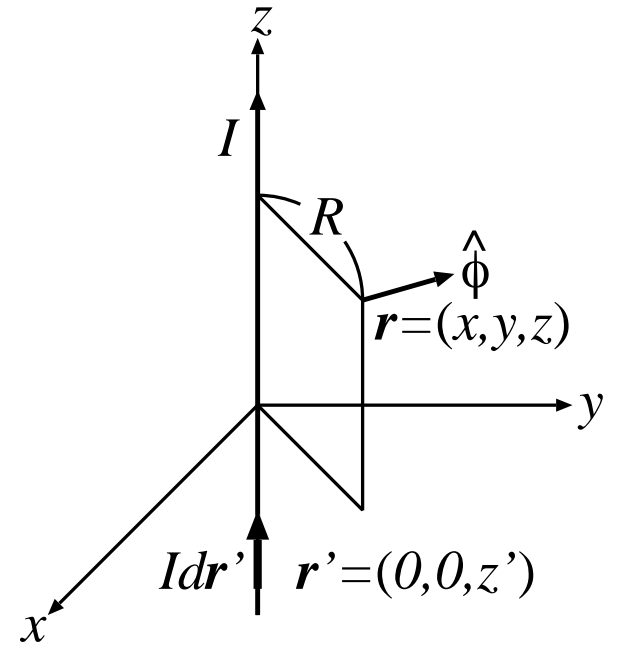


● 例 1: 直線電流のつくる磁場

電流を z 軸にとる .

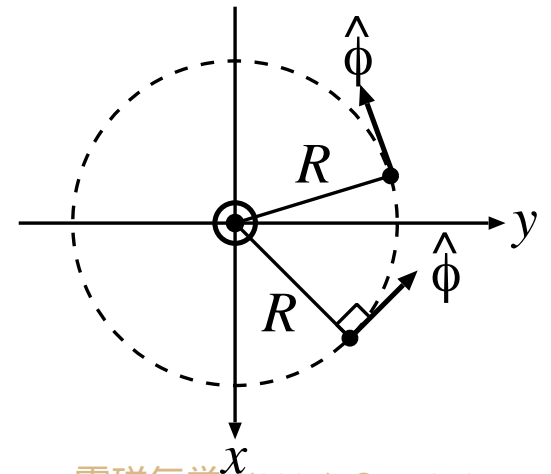
$d\mathbf{r}' = \hat{z}dz'$ ($\hat{z} = (0, 0, 1)$: z 軸方向の単位ベクトル) と書けるから ,

$$(5) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \hat{z} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} .$$



$$(6) \quad \hat{z} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (0, 0, 1) \times (x, y, z - z') = (-y, x, 0) = R\hat{\phi} .$$

ただし , $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\hat{\phi}$ は方位方向 (z 軸のまわりを回る方向) の単位ベクトル .



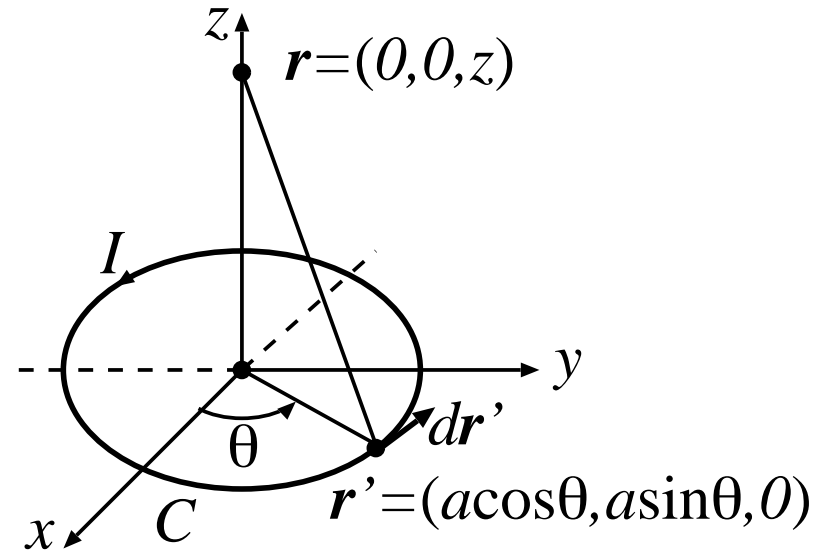
$$(7) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\sqrt{R^2 + (z - z')^2})^3}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\sqrt{R^2 + z'^2})^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}.$$

(電流からの距離に反比例．電流に沿って右ねじをまわす方向．)

● 例 2: 円電流 (半径 a) が中心軸上につくる磁場

$$(8) \quad d\mathbf{r}' = (-a \sin \theta, a \cos \theta, 0)d\theta$$

より,



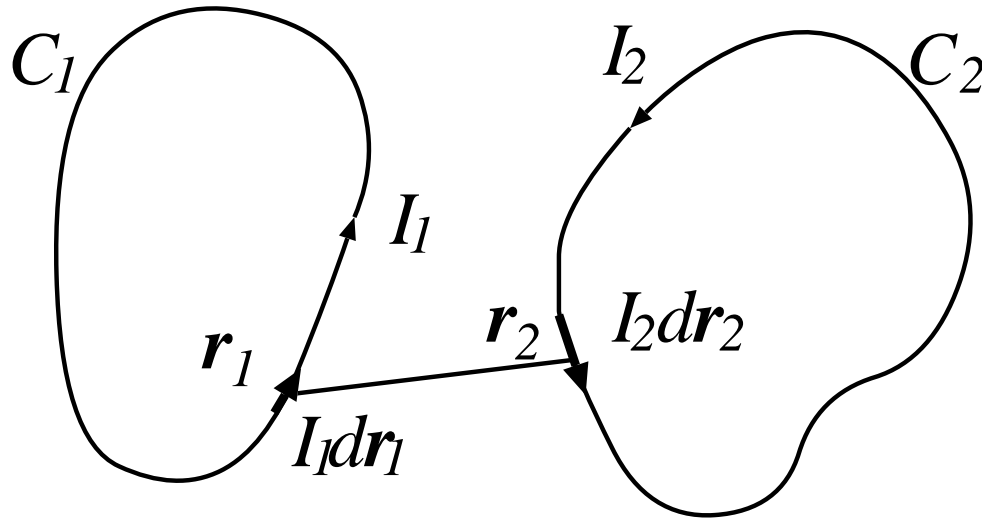
$$(9) \quad d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = ad\theta(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (-a \cos \theta, -a \sin \theta, z) \\ = ad\theta(z \cos \theta, z \sin \theta, a).$$

$$(10) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}.$$

よって,

$$\begin{aligned} (11) \quad \mathbf{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int d\theta (z \cos \theta, z \sin \theta, a) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

3.3.2 定常電流間に働く力



電流 I_1 が電流 I_2 の場所につくる磁場は，式 (3) より，

$$(12) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

この磁場が電流 I_2 に及ぼす力は，式 (3. 2. 17) より，

$$(13) \quad d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)$$

これを C_2 に沿って積分して,

$$(14) \quad \mathbf{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

アンペール (Ampère) の力 .

● 例 1: 平行直線電流間に働く力

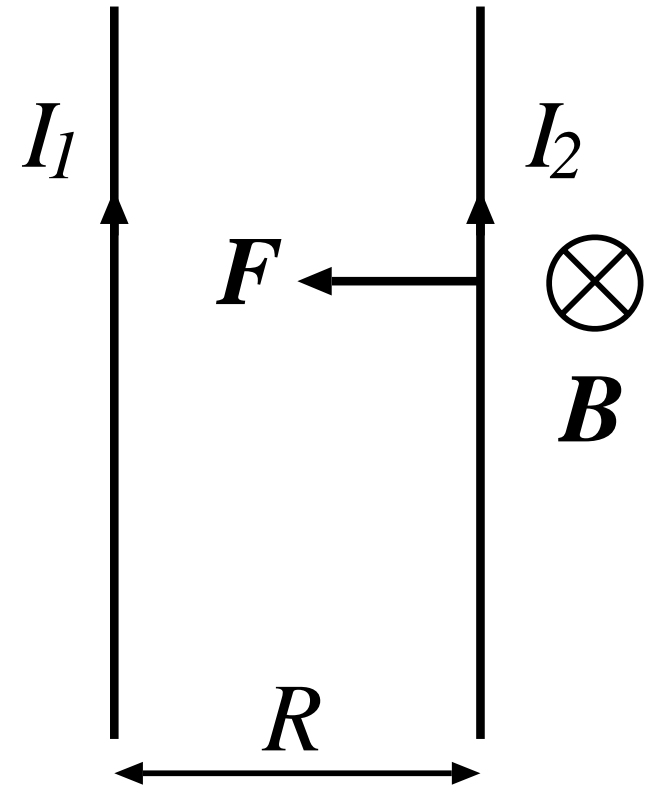
式 (7) より, I_1 が I_2 の所にする磁場は,

$$(15) \quad B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}.$$

I_2 が受ける力は, 式 (13) より,

$$(16) \quad dF = I_2 dr_2 B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dr_2.$$

(I_2 と B は直交 .)



力の向きは，電流に垂直で，電流が同じ(ちがう)方向のときは引力(斥力)．単位長さ当りの力は，

$$(17) \quad F_{\text{単位}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} .$$

○ 電流の単位 A(アンペア) は， $I_1 = I_2 \equiv I$ として，真空中で， $R = 1 \text{ m}$ ， $F_{\text{単位}} = 2 \times 10^{-7} \text{ N}$ となるような I を 1A とする．この定義により， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ となる．

3.3.3 ベクトルポテンシャル

$$(18) \quad \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

($\nabla_{\mathbf{r}}$ は \mathbf{r} についての微分を表わす.) 式 (1) と比較して,

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned}$$

$$(20) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' : \quad \underline{\text{ベクトルポテンシャル}}$$

を用いると,

$$(21) \quad \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})} \quad (\text{cf. } \mathbf{E} = -\nabla\phi)$$

式 (3) に対応する式は ,

$$(22) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{導線を通る電流の場合})$$

● B の発散
式 (21) より ,

$$(23) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (\mathbf{A} \text{ の形に依らない .})$$

式 (2.5.48) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ と較べると , “磁荷” が無いことを表わしている . これは B が時間に依存するときも正しい . (説明は第 5 章で)

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

● ベクトルポテンシャルの不定性
 A と A' が同じ B を与えるとする .

$$(24) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' .$$

これより，

$$(25) \quad \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0.$$

§§2.4.5 で示したように，回転がゼロのベクトル場は，スカラー場の勾配で書ける．つまり， $\chi(\mathbf{r})$ を適当なスカラー場とすると，

$$(26) \quad \mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla \chi.$$

従って，ある \mathbf{A} が $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を与えるとき，

$$(27) \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$$

も同じ \mathbf{B} を与える．実際，

$$(28) \quad \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \chi = \mathbf{B}.$$

この自由度を使って， $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ とすることができる．後で見るように，式 (20) の \mathbf{A} はこれを満す．

● 例 1: 一様な磁場

$$(29) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (\mathbf{B} \text{ は定数ベクトル})$$

とすると,

$$(30) \quad A_x = \frac{1}{2}(B_y z - B_z y), \quad A_y = \frac{1}{2}(B_z x - B_x z), \\ A_z = \frac{1}{2}(B_x y - B_y x)$$

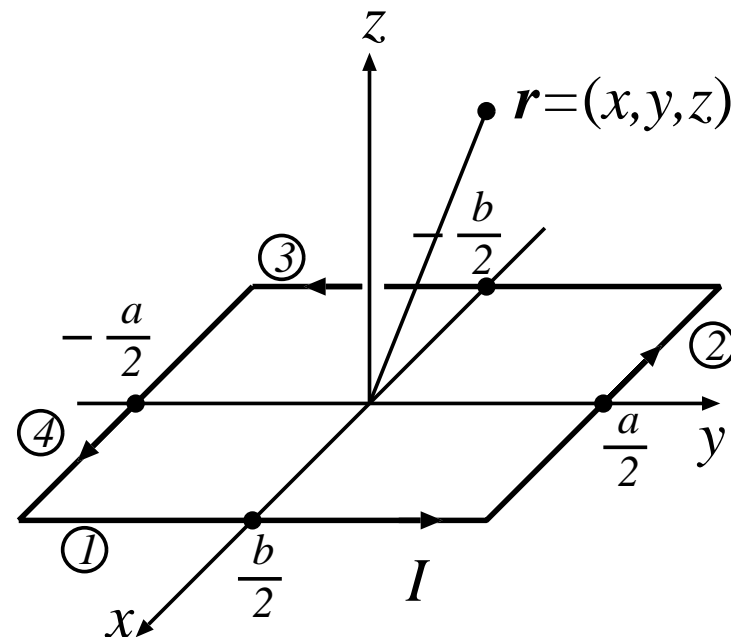
より,

$$(31) \quad (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{1}{2}(B_x + B_x) = B_x, \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{1}{2}(B_y + B_y) = B_y, \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{1}{2}(B_z + B_z) = B_z,$$

すなわち, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

- 小さいループ電流の作る磁場。
(ループの大きさに比べて遠方のみを考える.)

図のような xy 平面上の長方形ループ電流 I を考える.



$$(32) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

辺 1 の積分は, $d\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{y}} dy'$, $\mathbf{r}' = (b/2, y', 0)$, とすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(x - b/2)^2 + (y - y')^2 + z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - xb - 2yy' + b^2/4 + y'^2}}. \end{aligned}$$

$r \gg a, b$ として, $(-a/2 < y' < a/2)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r \sqrt{1 - xb/r^2 - 2yy'/r^2 + b^2/(4r^2) + y'^2/r^2}} \\ &\simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{xb}{2r^2} + \frac{yy'}{r^2} \right). \end{aligned}$$

$$\int_1 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq \hat{\mathbf{y}} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{xb}{2r^2} + \frac{yy'}{r^2} \right) dy' = \hat{\mathbf{y}} \frac{a}{r} \left(1 + \frac{xb}{2r^2} \right).$$

辺 3 の積分は, $b/2 \rightarrow -b/2$, $d\mathbf{r}' = -\hat{\mathbf{y}}dy'$ とすればよい:

$$\int_3 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq -\hat{\mathbf{y}} \frac{a}{r} \left(1 - \frac{xb}{2r^2} \right).$$

辺 4 の積分は, $d\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{x}}dx'$, $\mathbf{r}' = (x', -a/2, 0)$ として,

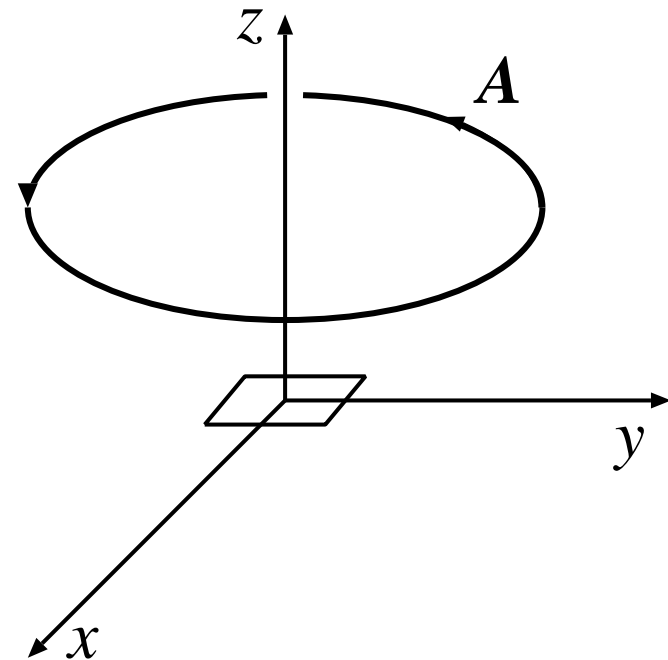
$$\int_4 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \hat{\mathbf{x}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y + a/2)^2 + z^2}} \simeq \hat{\mathbf{x}} \frac{b}{r} \left(1 - \frac{ya}{2r^2}\right).$$

辺 2 は ,

$$\int_2 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq -\hat{\mathbf{x}} \frac{b}{r} \left(1 + \frac{ya}{2r^2}\right).$$

まとめると ,

$$\begin{aligned} (33) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(-\hat{\mathbf{x}} \frac{b ya}{r r^2} + \hat{\mathbf{y}} \frac{a xb}{r r^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I ab}{4\pi r^3} (-\hat{\mathbf{x}} y + \hat{\mathbf{y}} x) \\ &= \frac{\mu_0 I ab}{4\pi r^3} (-y, x, 0). \end{aligned}$$



$$(34) \quad \mathbf{m} \equiv Iab\hat{\mathbf{z}} \quad \underline{\text{磁気双極子モーメントベクトル}}$$

(注: ab は回路の面積, $\hat{\mathbf{z}}$ は回路の法線ベクトル.) これを用いると, ($\mathbf{m} = (0, 0, Iab)$)

$$(35) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

と書ける. $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ から,

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right]. \end{aligned}$$

$\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$, $\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{m}$ を用いると,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{3\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^5} + \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \right].$$

さらに，公式

$$(37) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

を用いると， $\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = m r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})$ で，

$$(38) \quad \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-3m r^2 + 3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) + 2m r^2}{r^5} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5} \end{aligned}$$

(cf. (2. 4. 55) , 電気双極子の作る電場)

○ 一般に平面回路について，電流 I ，面積 S ，法線ベクトル \mathbf{n} とすると，

$$(39) \quad \mathbf{m} = I S \mathbf{n}$$

となり，遠方でのベクトルポテンシャル，磁場は式 (35) ， (38) で表わされる．

3.3.4 アンペール (Ampère) の法則

- アンペールの法則 (微分形)

式 (20) から与えられる B の回転を考える .

$$(40) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} .$$

第 1 項の寄与は ,

$$(41) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ & \quad (\nabla_{\mathbf{r}} \rightarrow \nabla_{\mathbf{r}'} \text{として}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \end{aligned}$$

(部分積分をして)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')) \left(\frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV'$$

(定常電流ゆえ $\nabla \cdot \mathbf{i} = 0$)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

(ガウスの定理を用いて)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

(電流分布は遠方でゼロ)

$$= 0.$$

よって,

$$(42) \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{A}.$$

一方，静電場のときの議論から，式 (2. 4. 19)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

が，式 (2. 7. 6)

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

の解であることを知っている．これから，式 (20)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

は，

$$(43) \quad \Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r})$$

(ベクトルポテンシャルに対するポアソン方程式) を満すことが分かる．よって，

(44) $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r})$ 微分形のアンプールの法則

- 静磁場の満す方程式をまとめると,

(45) $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}).$

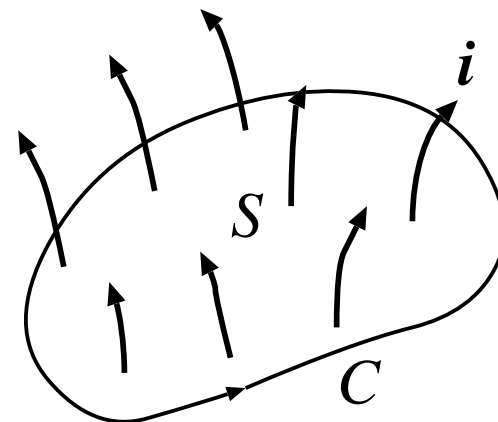
- ベクトルポテンシャルを用いると,

(46) $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}), \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.$

- アンペールの法則 (積分形)

閉曲線 C に囲まれた面 S を考える . 式 (44) をこの面で積分すると,

(47) $\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}.$



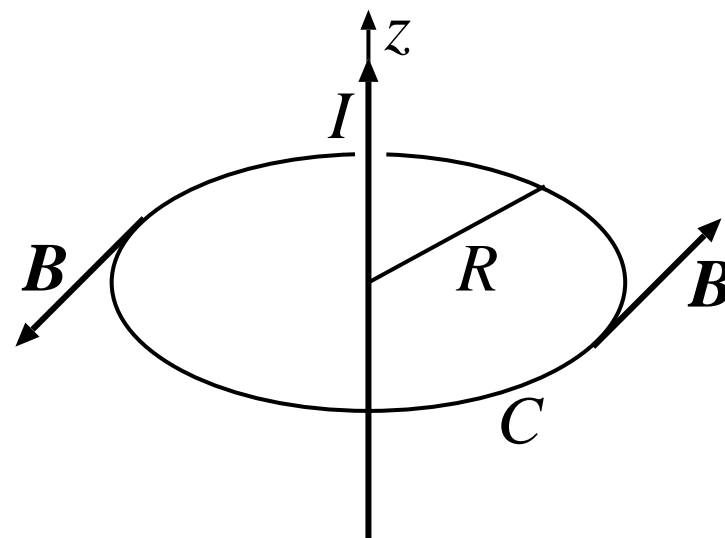
$\int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$ は S を通る電流 I であるから，ストークスの定理より，

(48) $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$ 積分形のアンプールの法則．

● 例 1: 定常直線電流の作る磁場 (cf. §§3. 3. 1 例 1)

電流 I を z 軸方向にとると， B は z 軸まわりの円周方向を向き，対称性からその大きさは電流からの距離 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ にのみよる．すなわち，

(49) $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(R) \hat{\phi}$.



z 軸のまわりの半径 R の円に式 (48) を適用すると，

(50) $2\pi R B(R) = \mu_0 I$.

つまり,

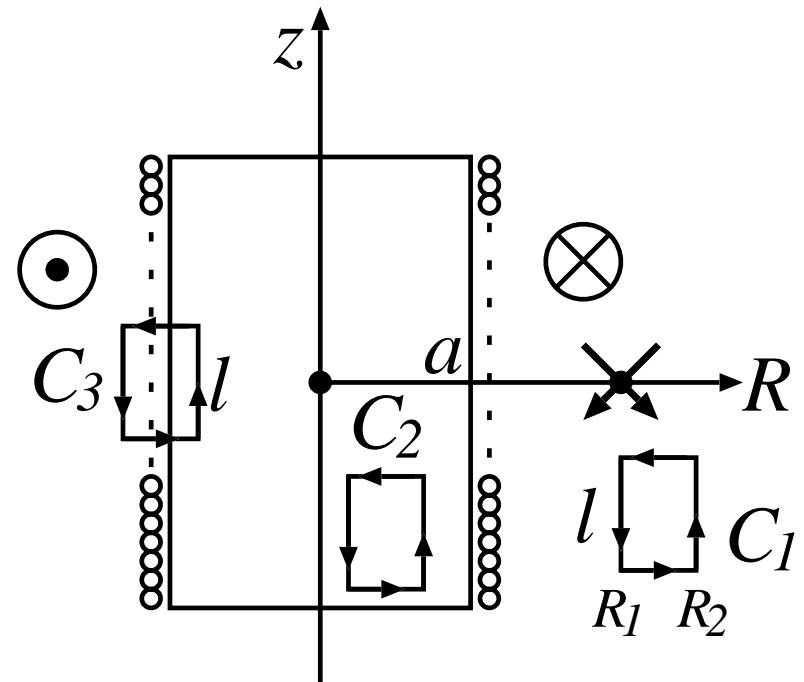
$$(51) \quad B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad \text{cf. (7)}$$

● 例 2: 無限に長いソレノイド
ソレノイドの軸は z 軸, 半径 a ,
電流 I , 単位長さ当りの巻数は n
とする.
円周方向の磁場は無い. 動径方向
の磁場は $\pm z$ の寄与が打ち消し合
う. 結局, z 成分のみがあり, 対
称性から,

$$(52) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = (0, 0, B_z(R))$$

と書ける. 閉曲線 C_1 に式 (48) を用いて,

$$(53) \quad \int_{C_1} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = lB_z(R_2) - lB_z(R_1) = 0.$$

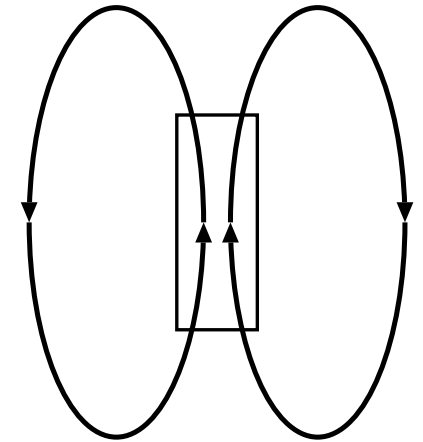


よって,

$$(54) \quad B_z(R_1) = B_z(R_2) \quad \text{ソレノイド外部では } B_z \text{ は一定.}$$

同様に, 式 (48) を閉曲線 C_2 に適用すると, ソレノイド内部でも B_z は一定.

ソレノイド内部から出た磁束 (ある面 S を貫く B を S で積分したもの) は必ず外部を通過して内部にもどらなければならないから,



$$(55) \quad B_z(\text{内部}) \cdot \text{内部の面積} = B_z(\text{外部}) \cdot \text{外部の面積.}$$

内部の面積は πa^2 , 外部の面積は無限大. 従って,

$$(56) \quad B_z(\text{外部}) = 0.$$

C_3 について考えると,

$$(57) \quad lB_z(\text{内部}) = \mu_0 n l I.$$

まとめると,

$$(58) \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}}, & R < a \\ 0, & R > a \end{cases}$$