

3.2 ローレンツ (Lorentz) 力

3.2.1 電荷に働く力

- 静止している ($v = 0$) の電荷 q

(1)
$$F = qE. \quad (\text{クーロン力})$$

- 速度 v で動いている電荷 q

(2)
$$F = q(E + v \times B), \quad B = \text{磁束密度 (磁場)}. \quad (\text{ローレンツ力})$$

速度に比例し, 速度に垂直な (仕事をしない) 力がある.

B の単位:

$$\frac{\text{Ns}}{\text{C m}} = \frac{\text{Nm}}{\text{A}} \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb(ウェーバー)}}{\text{m}^2} = \text{T(テスラ)}.$$

(Wb = Nm/A = Vs)

式 (2) は電磁場 (E, B) が時間に依っているときも正しい。

(3) $F = q [E(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times B(\mathbf{r}, t)]$, \mathbf{r} = 電荷の座標 , t = 時間 .

● 例 1: 一様な定常磁場中の点電荷の運動

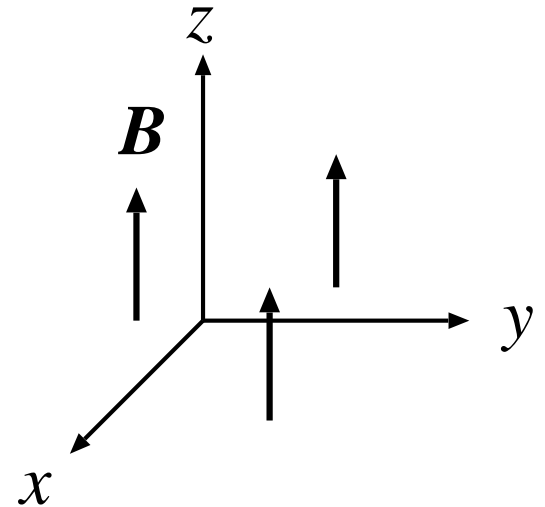
(4) $B = (0, 0, B)$

とする . 点電荷 q の質量を m , 速度を v とすると ,

(5) $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} .$

$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_x, v_y, v_z) \times (0, 0, B) = (v_y B, -v_x B, 0)$ ゆえ ,
式 (5) を成分で書くと ,

(6) $\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B , \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} v_x B , \frac{dv_z}{dt} = 0 .$



z 方向の運動は,

$$(7) \quad v_z = v_{z0} \quad (\text{定数}).$$

v_y を消去すると,

$$(8) \quad \frac{d^2}{dt^2} v_x = - \left(\frac{q}{m} B \right)^2 v_x.$$

よって,

$$(9) \quad v_x = v_{\perp} \cos(\omega t + \beta), \quad \omega \equiv \frac{q}{m} B, \quad v_{\perp}, \beta : \text{定数},$$

$$(10) \quad v_y = -v_{\perp} \sin(\omega t + \beta).$$

(注: $v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2$. v_{\perp} は速度の z 軸に垂直な成分の大きさ .) これを t で積分して,

$$(11) \quad x = \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \beta) + x_0, \quad y = \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \beta) + y_0.$$

(x_0, y_0 : 定数)

これより，

$$(12) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\omega}\right)^2 .$$

すなわち，半径 $v_{\perp}/\omega = v_{\perp}m/(qB)$ の円． z 方向は式 (7) より，

$$(13) \quad z = v_{z0}t + z_0, \quad \text{等速運動.}$$

よって，一定の半径のらせん運動をする．

点電荷の運動エネルギーは，

$$(14) \quad \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{m}{2}(v_{\perp}^2 + v_{z0}^2) = \text{一定.}$$

(磁場による力は仕事をしない.)

3.2.2 磁場中の電流に働く力

- 磁場中の細い一様な導線を流れる電流を考える。

点電荷 q が平均速度 v で移動している
と考えると, 1 個の電荷が受ける力は

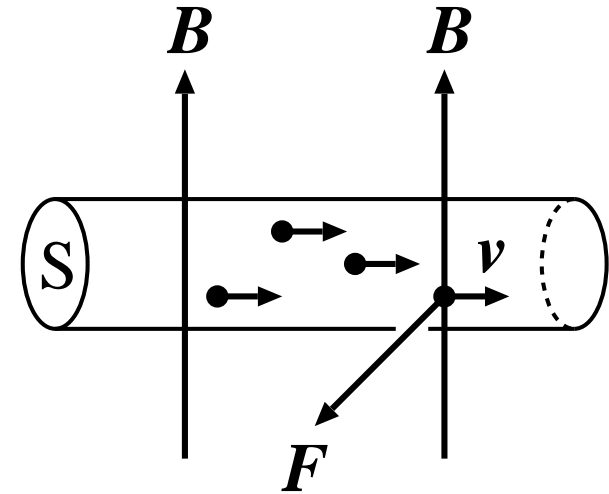
$$(15) \quad q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

電荷の数密度を n とすると微小体積
 dV の受ける力は, (ndV が電荷の個数)

$$(16) \quad d\mathbf{F} = ndVq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{i} \times \mathbf{B} dV. \quad (\text{式 (3. 1. 4)})$$

断面 S について積分すると,

$$(17) \quad d\mathbf{F} = \int_S \mathbf{i} \times \mathbf{B} dSdr = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}. \quad (\text{式 (3. 1. 20)})$$

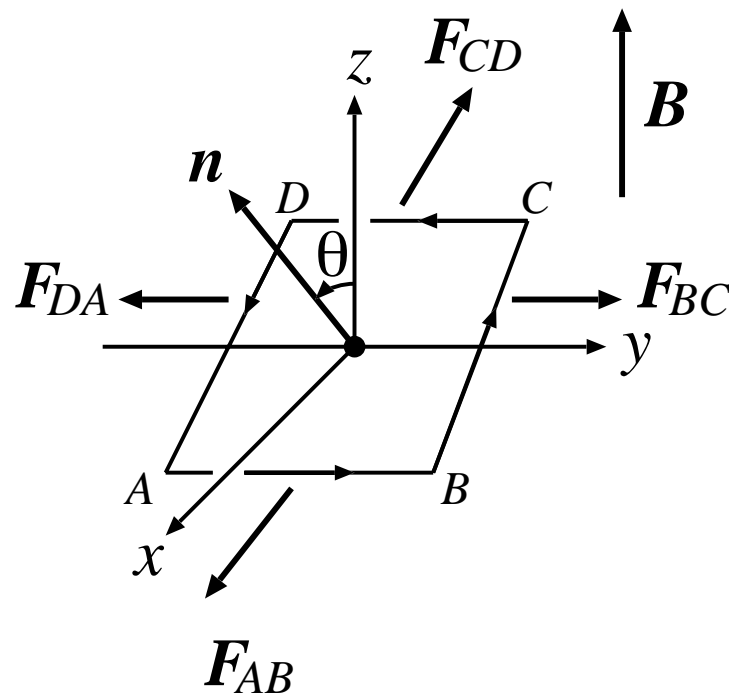


単位長さあたりの力は， $I d\mathbf{r} = I d\mathbf{r}$ と書けば，

$$(18) \quad \mathbf{I} \times \mathbf{B}$$

となる． (q に依存しないことに注意．)

● 例 1: ループ電流に働く力
一様な磁場中の長方形ループ電流 $ABCD$ を考える． $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ．
 $AB = a$ ， $BC = b$ ．ループ面は y 軸を通り，その法線ベクトルは z 軸と角度 θ をなす．導線 AB に働く力は， CD に働く力と逆向きで同じ大きさ．
 BC と DA も同様．従って，ループ全体に働く力はゼロ．しかし， y 軸のまわりに回転させようとする偶力 (トルク) がある．



$$(19) \quad F_{AB} = F_{CD} = IBa .$$

よって、トルクは、

$$(20) \quad T = I B a b \sin \theta = I a b B \sin \theta .$$

$$(21) \quad \mathbf{m} = I a b \mathbf{n} \quad (\text{磁気双極子モーメント})$$

と書くと、

$$(22) \quad \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} .$$

○ 一般に平面回路 (面積 S , 法線ベクトル \mathbf{n}) を流れる電流について、

$$(23) \quad \mathbf{m} = I S \mathbf{n} , \quad \text{単位: } \text{Am}^2 .$$

