2008/01/28 出題

電磁気学 I (田中担当クラス) 演習問題

提出期限: 2 月 12 日午後 5 時まで. 提出場所: 理学部 H 棟 H725.

1. 以下のベクトル演算に関する公式を示せ. ただし, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はベクトル, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はベクトル場とする.
   (a) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
   (b) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$
   (c) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$
   (d) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \triangle\boldsymbol{A}$
   (e) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

2. ポアッソン方程式を用いて, 静電ポテンシャルが $\phi(r) = -e^{-r/a}/(\varepsilon_0 r)$ となるような電荷分布を求めよ. (ヒント: ポテンシャルが球対称であるから, 球対称な場合のポアッソン方程式を用いればよい.)

3. 極板の面積が A, 極板間の距離が d の平行板コンデンサーを考える. 極板には $\pm Q$ の電荷が蓄えられている. ($Q > 0$ とする.)
   (a) 極板間の電場は極板に垂直で一様である. この電場の大きさ E を求めよ.
   (b) 極板間の電場のエネルギーを
   $$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})\,dV$$
   を用いて求めよ.
   (c) コンデンサーのエネルギーを $U = Q^2/(2C)$ を用いて求め, 上の結果と比較せよ.

4. 半径 a, 単位長さ当りの巻数が n の無限に長いソレノイドを考える. 中心軸を z 軸とし, z 軸の正の方向に右ねじが進むように電流 I が流れている.
   (a) 中心軸上の磁場はどちらを向いているか.
   (b) ビオ-サバールの法則を用いて, 中心軸上の磁場の大きさを求めよ.

5. z 軸を中心軸とする無限に長い半径 a の円柱の内部を, z 軸の正の方向に電流が一様に流れている. z 軸からの距離を R とすれば, 電流密度は,
   $$\boldsymbol{i}(R) = \begin{cases} i\,\hat{\boldsymbol{z}}\,(i>0,\ \text{定数})\,, & R \le a\,, \\ 0\,, & R > a\,, \end{cases}$$
   で与えられる.
   (a) この電流分布が作る磁場の向きを図示せよ.
   (b) 磁場の大きさを R の関数として求めよ.

6. 半径 a の導体円板が, その法線に平行な一様な磁場 B の中で角速度 ω で回転している. 円板の中心と縁の間に生じる起電力を求めよ. (ヒント: 単位電荷に働く力を, 動径に沿って中心から縁まで積分すればよい.)