5.2 電磁波

5.2.1 自由空間でのマクスウェル方程式の解

$\rho = 0$, $\boldsymbol{i} = 0$ とする．(自由空間)

● x, y によらず z のみの関数であるような解を考えよう．つまり,
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(z, t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}(z, t)$.
式 (5. 1. 20) から，($\rho = 0$ として)

(1)
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,.$$

式 (5. 1. 21) から，

(2)
$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\,.$$

式 (5. 1. 22) から,

(3)
$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\,,$$

(4)
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\,,$$

(5)
$$0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\,.$$

式 (5. 1. 23) から ($\boldsymbol{i} = 0$ として), $\mu_0\varepsilon_0 = 1/v^2$ とおくと,

(6)
$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\,,$$

(7)
$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\,,$$

(8)
$$0 = \frac{1}{v^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}\,.$$

式 (1) と式 (8) から，E_z は定数．静電場に興味はないから (よく知っているから),

$$E_z = 0 \tag{9}$$

と置く．同様に，式 (2) と式 (5) から，

$$B_z = 0\,. \tag{10}$$

E_x と E_y は一般にゼロでないが，特に $E_y = 0$ となる解を考えよう．このとき，式 (3)，式 (7) より

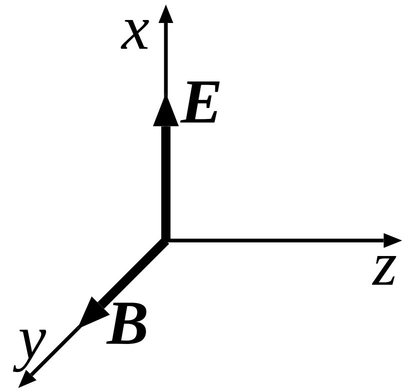
$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0\,. \tag{11}$$

つまり，

$$B_x = 0 \tag{12}$$

と置ける．

これと，式 (3)，式 (7) から，



$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0\,. \quad \Leftarrow \quad E_y = 0$$ (矛盾はない)

ここまでの結果をまとめると，

$$\boldsymbol{E} = (E_x(z,t), 0, 0)\,, \quad \boldsymbol{B} = (0, B_y(z,t), 0)\,.$$

残っている方程式は式 (4) と式 (6)．$\frac{\partial}{\partial z}$(4) $+ \frac{\partial}{\partial t}$(6) から，

(13) $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x = 0\,.$$

$\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}$(4) $+ \frac{\partial}{\partial z}$(6) から，

(14) $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_y - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_y = 0\,.$$

式 (13)，(14) のような方程式を (1 次元)波動方程式 という．

式 (13) の一般解は,

(15) $$E_x(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt)\,, \quad f, g:\ \text{任意関数}\,.$$

実際,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = f'' + g''\,, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = (-v)^2 f'' + (+v)^2 g'' = v^2(f'' + g'')\,.$$

このとき，式 (4)，(6) より,

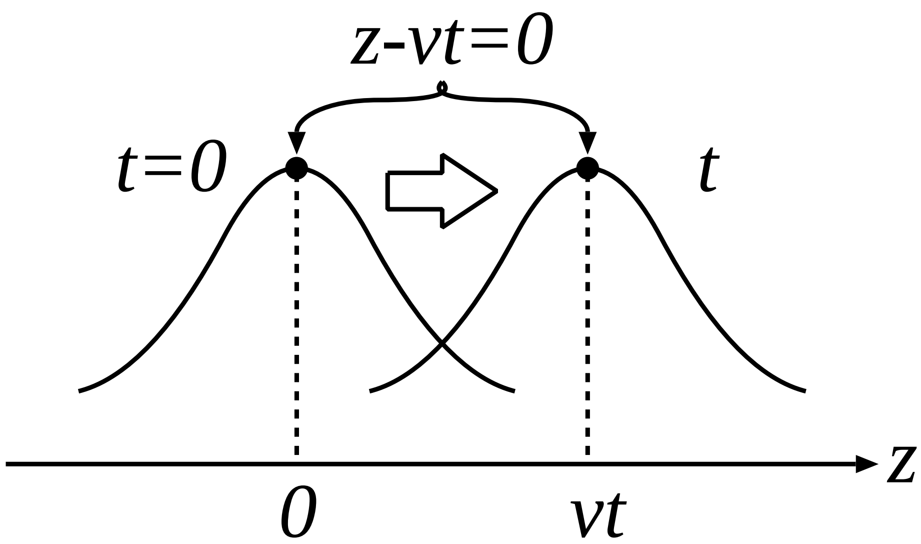
(16) $$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -f' - g'\,, \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{v}(f' - g')\,.$$

これを積分して,

(17) $$B_y(z,t) = \frac{1}{v}[f(z - vt) - g(z + vt)] + \text{定数}\,.$$

(定数は以下ではゼロとする．)

- この解の意味
  - $f(z-vt)$: 速さ v で z 軸の方向に進む波



  - $g(z+vt)$: 速さ v で z 軸の反対方向に進む波
  - 時刻 t で $z \pm vt$ が一定の面は x-y 平面. $\Rightarrow$ 平面波
  - $\rho = 0,\ \ \boldsymbol{i} = 0$ でも真空中を電磁場は伝わって行く.

$\Rightarrow$ 電磁波

5.2.2 電磁波の性質

- 速さ

式 (2. 1. 4)，(3. 3. 2) から，

$$(18)\quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{4\pi 10^{-7} c^2 \frac{1}{4\pi 10^{-7}}} = c\,, \qquad \text{(真空中の) 光速}\,.$$

$\Rightarrow$ 光は電磁波.

- 方向性

式 (15)，(17) の f の解は，z 軸方向に進み，$\boldsymbol{E}$ は x 軸方向，$\boldsymbol{B}$ は y 軸方向．g の解は，z 軸の負の方向に進み，$\boldsymbol{E}$ は x 軸方向，$\boldsymbol{B}$ は y 軸の負の方向．($f, g > 0$ として．)
すなわち，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ は電磁波の進行方向に垂直.
$\Rightarrow$ 電磁波は横波.

$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ も互いに垂直．一般に，$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \propto$ 進行方向 となる.

- 調和振動解 (単色波)

$\frac{\partial}{\partial t}$(5. 1. 23) に (5. 1. 22) を代入すると，($\boldsymbol{i}=0$ として)

(19) $$\nabla\times(-\nabla\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\,.$$

(20) $$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E}$$

と (5. 1. 20)($\rho=0$) を用いると，

(21) $$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0\,.$$ (3 次元) 波動方程式

同様に，$\frac{\partial}{\partial t}$(5. 1. 22) と (5. 1. 23) から，

(22) $$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0\,.$$ (3 次元) 波動方程式

式 (21) の解として,

(23) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,, \quad \boldsymbol{E}_0\,, \boldsymbol{k}\ :\ \text{定数ベクトル}$$

を考える．$\hat{\boldsymbol{E}}_0$ は電場の向きを表し，$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルと呼ばれる．
これは $\boldsymbol{k}$ の方向に進む波を表している．
式 (21) に式 (23) を代入して,

(24) $$\boldsymbol{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \ \Rightarrow\ k \equiv |\boldsymbol{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (\omega = ck)\,.$$

(5. 1. 20) から，($\rho = 0$)

(25) $$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0\,,$$ 電場は $\boldsymbol{k}$(進行方向) に垂直．(横波)

(5. 1. 22) に式 (23) を代入して,

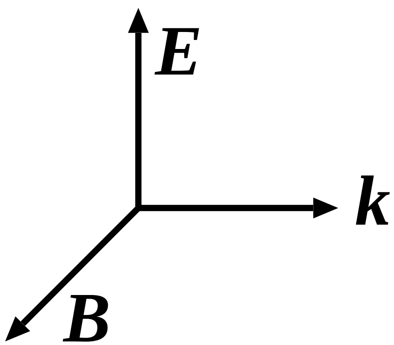
(26) $$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,.$$

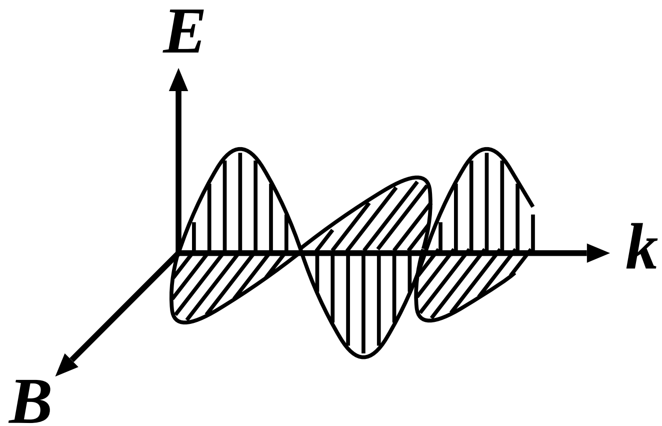
これを積分して，(式 (22) の解として)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{k}}{\omega}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{27}$$

磁場は $\mathbf{E}$，$\mathbf{k}$ と垂直．(横波)

を得る．





また，$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0$ を用いて，

$$\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\frac{1}{\omega}\mathbf{E}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E})=\frac{1}{\omega}[\mathbf{E}^2\mathbf{k}-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{k})\mathbf{E}]=\frac{\mathbf{E}^2}{\omega}\mathbf{k}\,. \tag{28}$$