

第5章 マクスウェル方程式と電磁波

5.1 マクスウェル(Maxwell) 方程式

5.1.1 電場と磁場の双対性 (duality)

- これまでに分かった電磁場の基本方程式

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}, \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0,$$

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{ファラデーの法則})$$

$$(4) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}). \quad (\text{アンペールの法則})$$

- 式(1)は動的な場合も成り立つ。(理由は以下で。)

$$(5) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}.$$

- 式(2)も同様.

$$(6) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

- 式(6)は磁場に対するガウスの法則.“磁荷”が存在しないだけ.
- 式(3)は、変化する磁場から電場ができるることを表わしている.
- 式(4)も式(5), (6)のように動的な場に拡張してみよう.

$$(7) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{誤})$$

- 電場と磁場の対応関係(双対性)を考慮して、式(3)と(7)を比較してみると、(3)の右辺に(7)の電流に相当する“磁流”がないのは、(6)で“磁荷”がないためと考えられる。(7)の右辺には、(3)の右辺のように、 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ のような項があると推測される。(変動する電場も磁場を作るだろう.)

5.1.2 変位電流

式(7)の発散を考えてみる。

$$(8) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t).$$

左辺 = 0。これは電荷保存則 (§§3. 1. 2)

$$(9) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0$$

と矛盾する。式(5)を用いると、

$$(10) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

すなわち、

$$(11) \quad \nabla \cdot \left[\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] = 0.$$

\Rightarrow 式(7)で $i \rightarrow i + \varepsilon_0 \partial E / \partial t$ とすればよい .

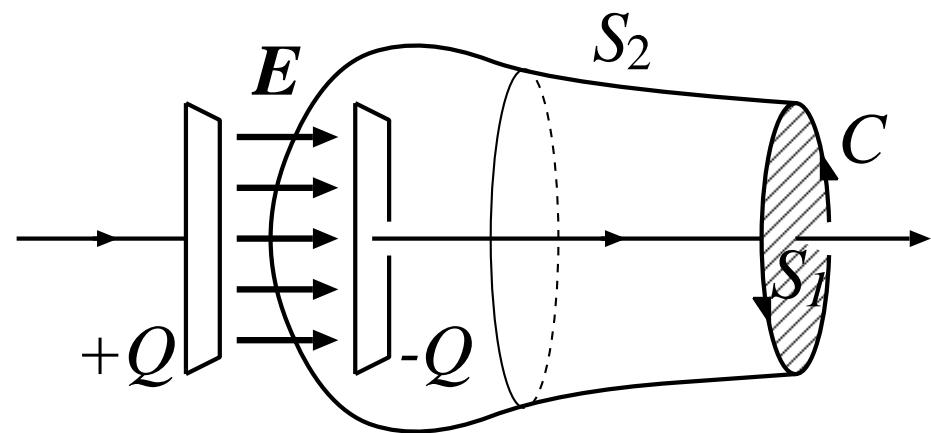
$$(12) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left[\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (\text{正})$$

アンペール・マクスウェルの法則

$$(13) \quad \mathbf{i}_d(\mathbf{r}, t) \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \underline{\text{変位電流}}$$

● 例 1: コンデンサーと変位電流

平行板コンデンサーに電流 $I(t)$ が流れている . 閉曲線 C とそれに囲まれた面 S_1 を考えると ,



$$(14) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

(S_1 には電場はないから，変位電流の寄与はない。)
面 S_2 を考えると，そこには(伝導)電流はないから，

$$(15) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

(変位電流の寄与のみ。) 極板の電荷を $\pm Q(t)$ ，面積を S とすると，
(式 (2. 8. 2))

$$(16) \quad E(t) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\varepsilon_0 S}.$$

$$(17) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{I}{\varepsilon_0 S} \int_S dS = \mu_0 I.$$

(積分は E のあるところだけ，すなわち極板間のみ。)

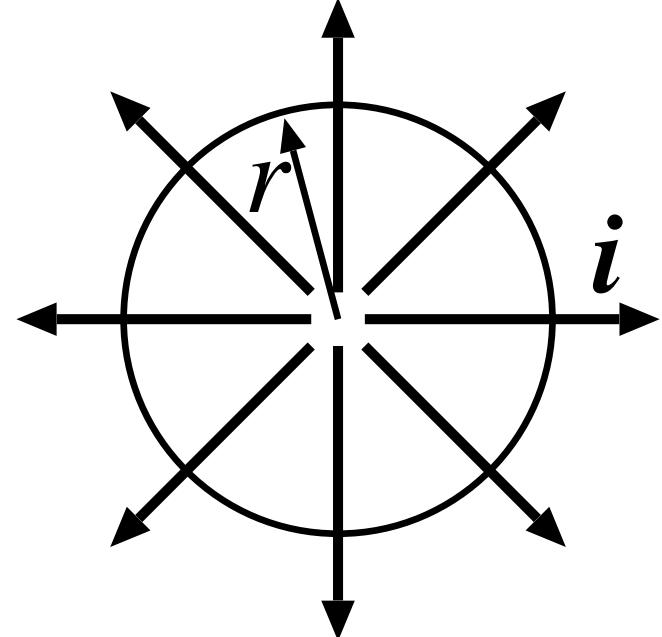
もし変位電流を考えないとこれはゼロになり，式(14)と矛盾．

● 例 2: 球対称で放射状の電流

半径 r の球面 S を考える．この内部の電荷を $Q(r, t)$ とすると，

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial t} Q(r, t) = -4\pi r^2 i(r).$$

S 上の閉曲線 C を考える． S_C を C に囲まれた面として，



$$\begin{aligned}
 (19) \quad & \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_{S_C} \left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \mu_0 \int_{S_C} \left[i(r) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right) \right] dS \\
 &= \mu_0 \int_{S_C} \left[i(r) + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t} \right] dS = 0
 \end{aligned}$$

磁場(の循環)はできない.

5.1.3 マクスウェル方程式

- 電磁気学の基本方程式をまとめると、

$$(20) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0},$$

$$(21) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$(22) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

$$(23) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

これらをまとめてマクスウェルの方程式という。これとローレンツ力

$$(24) \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

が電磁気学の基本法則となる。

• マクスウェルの方程式に解はあるか？

$$\begin{array}{ll} \text{未知関数} & E, B \quad 6 \text{ 個} \\ \text{方程式の数} & \quad \quad \quad 8 \text{ 個} \end{array}$$

○ 式(23)の発散を考えると，

$$(25) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

左辺 = 0。また，電荷保存則から $\nabla \cdot \mathbf{i} = -\partial \rho / \partial t$. よって，

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0.$$

従って， $t = t_0$ で $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0) = \rho(\mathbf{r}, t_0) / \varepsilon_0$ が成り立てば，任意の時刻 t で式(20)が成り立つ。すなわち，式(20)は初期条件として要求するだけでよい。(これが式(1) ⇒ 式(5)の理由。)

- 同様に式 (22) の発散を考えると ,

$$(27) \quad 0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} .$$

$t = t_0$ で $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) = 0$ なら , 任意の t で $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$.

- 式 (20) と式 (21) が初期条件として成り立つければ , 式 (22) と式 (23) で決定される E , B の時間発展で式 (20) , 式 (21) が成り立たなくなるようなことはない .
- つまり , 式 (20) , 式 (21) は補助的な方程式で , E , B (6 つの未知関数) の時間発展は式 (22) , 式 (23) (6 つの方程式) で記述される .