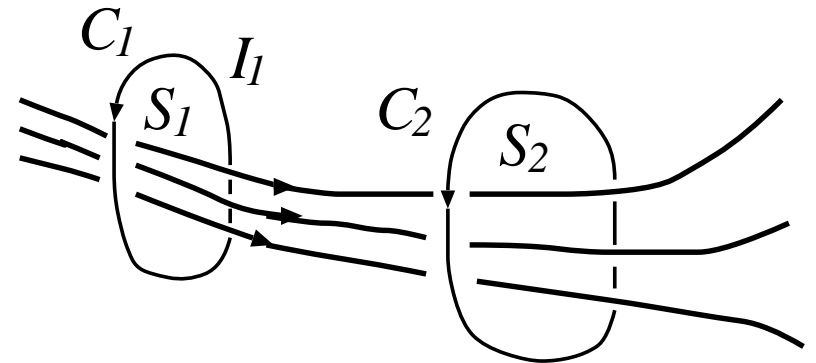


4.2 インダクタンス

4.2.1 相互インダクタンス

● 2つの回路 C_1 , C_2 を考える。
 C_1 に電流 I_1 を流すと磁束密度 B_1 (ベクトルポテンシャル A_1) が生じる。このとき, C_2 を貫く磁束は,



$$\begin{aligned} (1) \Phi_{21} &= \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &\Leftarrow (3.3.22) \\ &= \oint_{C_2} \left(\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) I_1 \equiv M_{21} I_1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad \underline{\text{相互インダクタンス}}$$

(相互誘導係数)

2つの回路の形状や相対的配置のみに依る。

逆に C_2 に電流 I_2 を流すと, C_1 を貫く磁束は, (I_2 の作る磁場を B_2 , ベクトルポテンシャルを A_2 として)

$$(3) \Phi_{12} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}_2) \cdot d\mathbf{S}_1 = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1$$

$$= \oint_{C_1} \left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \cdot d\mathbf{r}_1$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) I_2 = M_{12} I_2$$

$$(4) \quad M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = M_{21} (\equiv M).$$

- 例 1: ソレノイドに巻いたコイル
ソレノイドの断面積 S , 巻数 N_1 , 長さ l , 電流 I_1 とし , コイルの巻き数を N_2 とする .

$$(5) \quad B = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 .$$

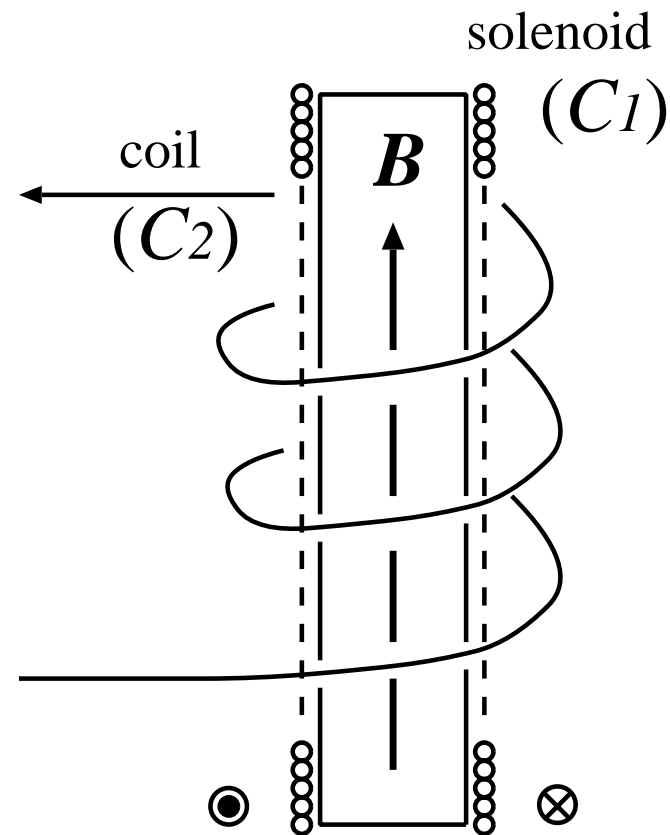
ソレノイドの磁束は BS で , これは全てコイルを N_2 回貫く . よって ,

$$(6) \quad \Phi_{21} = N_2 BS = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{l} I_1 .$$

ゆえに ,

$$(7) \quad M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{l} .$$

M_{12} を直接計算することは難しいが , 式 (4) より ,
 $M_{12} = M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 S / l$ となる .



- インダクタンスの単位

$$(8) \quad 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \equiv 1 \text{ H (ヘンリー)}.$$

- 電流 I_1 が変化すると,

$$(9) \quad \Phi_{21}(t) = M I_1(t).$$

このために C_2 に生じる起電力は,

$$(10) \quad \phi_{em,21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

⇒ C_2 にも電流が流れる。(逆も同様.)

4.2.2 自己インダクタンス

- I_1 による磁束で C_1 自身を貫くものは I_1 に比例するから，

$$(11) \quad \Phi_{11} = M_{11}I_1 = L_1I_1, \quad L_1(\equiv M_{11}) : \underline{\text{自己インダクタンス}}$$

と書ける．同様に，

$$(12) \quad \Phi_{22} = M_{22}I_2 = L_2I_2.$$

- 回路が1つのときは，

$$(13) \quad \Phi = LI. \quad (\text{常に } L > 0)$$

このとき，回路に生じる起電力は，

$$(14) \quad \phi_{em} = -L \frac{dI}{dt}.$$

すなわち，インダクタンス(コイル)に電流を流そうとすると，逆起電力が生じる．

- 例 1: ソレノイドの自己インダクタンス

(15)
$$B = \mu_0 n I . \quad (3. 3. 58)$$

断面積を S とすると, 単位長さ当りの L は,

(16)
$$L_{\text{単位}} = \frac{\Phi_{\text{単位}}}{I} = \frac{nBS}{I} = \mu_0 n^2 S .$$

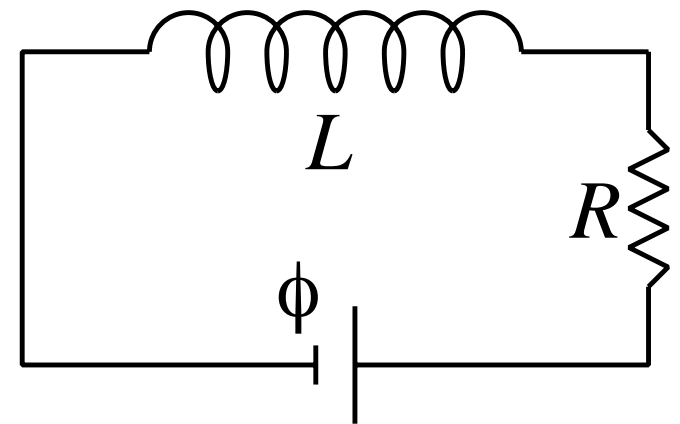
注) これを式 (2) で $C_1 = C_2$ として求めることはできない. 一般には導線の太さを考えて, その中での i を用いて計算する必要がある.

- 例 2: RL 回路

回路中の全起電力は式 (14) より,

$$\phi = L \frac{dI}{dt} .$$

オームの法則より,



$$(17) \quad RI(t) = \phi - L \frac{dI}{dt}.$$

$$(18) \quad I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{\phi}{L}.$$

$\phi/L = 0$ のときの解は, $ae^{-Rt/L}$. これに定数 b を加えて,

$$(19) \quad I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + b.$$

式 (18) に代入して,

$$(20) \quad \frac{R}{L}b = \frac{\phi}{L} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\phi}{R} \quad \Rightarrow \quad I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\phi}{R}.$$

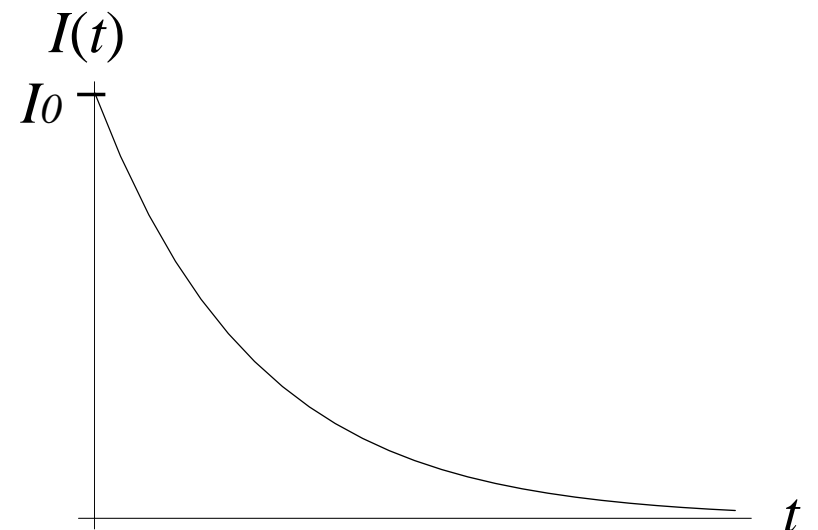
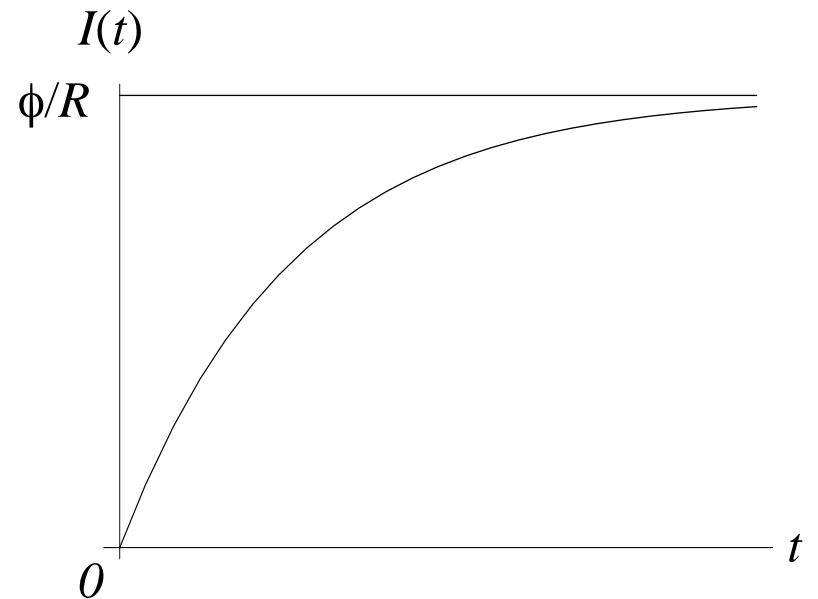
$I(0) = 0$ とすると, $a = -\phi/R$.
よって,

$$(21) \quad I(t) = \frac{\phi}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

$\tau \equiv L/R$ を緩和時間という.

$I(0) = I_0$ で $\phi = 0$ のときは, 式
(20) より,

$$(22) \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



● 例 3: 変圧器 (トランス) の原理

§§4. 2. 1 の例 1 で , ソレノイド (C_1) に外部起電力 ϕ_1 を与えたとする .

$$(23) \quad \phi_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} = 0. \quad (\text{起電力降下の総和はゼロ})$$

このとき , コイル (C_2) に誘導される起電力 $\phi_{em,21}$ は式 (10) .

$$\phi_{em,21} = -M \frac{dI_1}{dt} .$$

よって ,

$$(24) \quad \frac{\phi_{em,21}}{\phi_1} = -\frac{M}{L_1} .$$

式 (7) , (16) を用いると ,

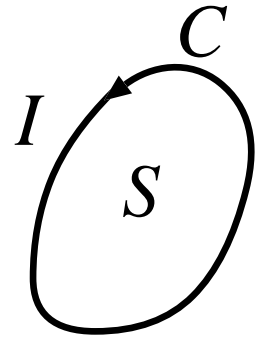
$$(25) \quad \frac{\phi_{em,21}}{\phi_1} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 S / l}{\mu_0 (N_1 / l)^2 S l} = -\frac{N_2}{N_1} .$$

すなわち， C_2 に発生する起電力は巻数の比に比例する．
(電圧が自由に換えられる．交流の利点．)

4.2.3 インダクタンスのエネルギー

- 1つの回路の場合

回路 C に電流 I が流れているとき, 式 (4. 1. 30) より,



$$(26) \quad U = \frac{1}{2} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

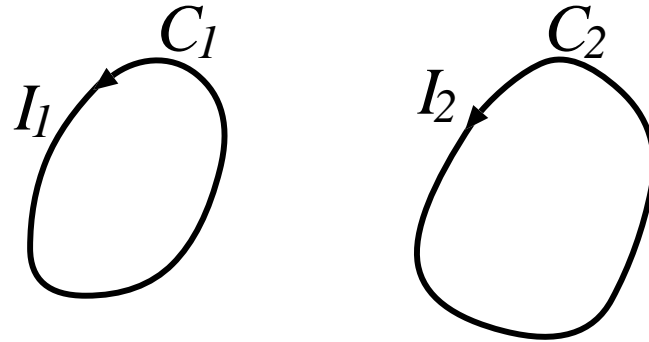
(\Leftarrow ストークスの定理)

$$= \frac{1}{2} I \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} L I^2 .$$

(Φ は C を貫く磁束で、式 (13) を使った .)

● 2つの回路の場合



$$\begin{aligned}
 (27) \quad U &= \frac{1}{2} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV \\
 &= \frac{1}{2} I_1 \oint_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} I_2 \oint_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 \\
 &\quad (C_1 \text{ を貫く磁束}) \quad (C_2 \text{ を貫く磁束}) \\
 &= \frac{1}{2} I_1 (\Phi_{11} + \Phi_{12}) + \frac{1}{2} I_2 (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \\
 &\quad (\Phi_{1j}, \Phi_{2j}: I_j \text{ による磁束}) \\
 &= \frac{1}{2} I_1 (L_1 I_1 + M I_2) + \frac{1}{2} I_2 (M I_1 + L_2 I_2) \\
 &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 .
 \end{aligned}$$

- 例 1: ソレノイド

単位長さ当りのエネルギーは ,

$$(28) \quad U_{\text{単位}} = \frac{1}{2} L_{\text{単位}} I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S I^2 . \quad \text{cf. (4. 1. 32)}$$

(逆に (4. 1. 32) からソレノイドの $L_{\text{単位}}$ を求めることもできる .)

- 自己インダクタンスと相互インダクタンスの関係

2つの回路を考える .

$$(29) \quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 \left(I_1^2 + 2 \frac{M}{L_1} I_1 I_2 \right) + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - \frac{1}{2} L_1 \frac{M^2}{L_1^2} I_2^2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) I_2^2 \end{aligned}$$

回路に電流を流すとき，必ず仕事 (> 0) をするから，回路のエネルギーは常に正である． $U > 0$ より，

$$(30) \quad L_2 - \frac{M^2}{L_1} > 0 \implies L_1 L_2 > M^2. \quad (L_1 > 0)$$

$$(31) \quad M = k \sqrt{L_1 L_2}, \quad k < 1 \text{ (結合係数)}$$

と書ける．