3.2　ローレンツ (Lorentz) 力

3.2.1　電荷に働く力

- 静止している ($\boldsymbol{v} = 0$) の電荷 q

(1)
$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}\,. \quad (\text{クーロン力})$$

- 速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている電荷 q

(2) $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,,\ \boldsymbol{B} = $ 磁束密度 (磁場)．　(ローレンツ力)

速度に比例し，速度に垂直な (仕事をしない) 力がある．
$\boldsymbol{B}$ の単位:

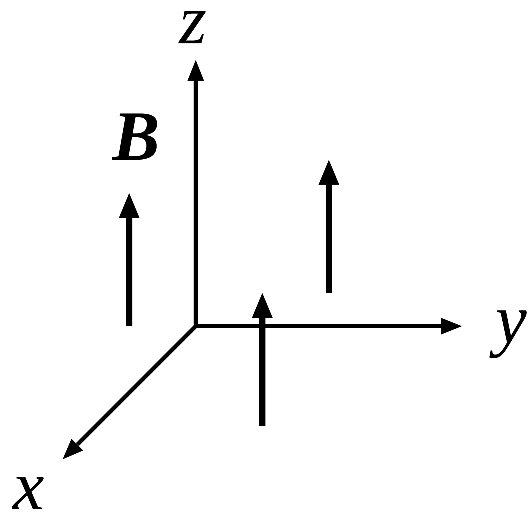
$$\frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{C\,m}} = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{A}}\frac{1}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{Wb}(\text{ウェーバー})}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{T}(\text{テスラ})\,.$$

($\mathrm{Wb} = \mathrm{Nm/A} = \mathrm{Vs}$)

式 (2) は電磁場 ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$) が時間に依っているときも正しい.

(3) $$\boldsymbol{F} = q\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\right], \ \boldsymbol{r} = \text{電荷の座標}, \ t = \text{時間}.$$

- 例 1: 一様な定常磁場中の点電荷の運動



(4) $$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$$

とする．点電荷 q の質量を m，速度を $\boldsymbol{v}$ とすると,

(5) $$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = (v_x, v_y, v_z) \times (0, 0, B) = (v_y B, -v_x B, 0)$ ゆえ，式 (5) を成分で書くと,

(6) $$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}v_y B, \ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m}v_x B, \ \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

z 方向の運動は,

(7)
$$v_z = v_{z0} \quad (\text{定数})\,.$$

v_y を消去すると,

(8)
$$\frac{d^2}{dt^2}v_x = -\left(\frac{q}{m}B\right)^2 v_x\,.$$

よって,

(9)
$$v_x = v_\perp \cos(\omega t + \beta)\,,\ \omega \equiv \frac{q}{m}B\,,\quad v_\perp, \beta:\ \text{定数}\,,$$

(10)
$$v_y = -v_\perp \sin(\omega t + \beta)\,.$$

(注: $v_x^2 + v_y^2 = v_\perp^2$. $v_\perp$ は速度の z 軸に垂直な成分の大きさ.) これを t で積分して,

(11)
$$x = \frac{v_\perp}{\omega}\sin(\omega t + \beta) + x_0\,,\ y = \frac{v_\perp}{\omega}\cos(\omega t + \beta) + y_0\,.$$

(x_0, y_0: 定数)

これより,

(12) $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\left(\frac{v_\perp}{\omega}\right)^2 .$$

すなわち，半径 $v_\perp/\omega = v_\perp m/(qB)$ の円．z 方向は式 (7) より,

(13) $$z = v_{z0}t + z_0 \,, \quad \text{等速運動.}$$

よって，一定の半径のらせん運動をする．
点電荷の運動エネルギーは,

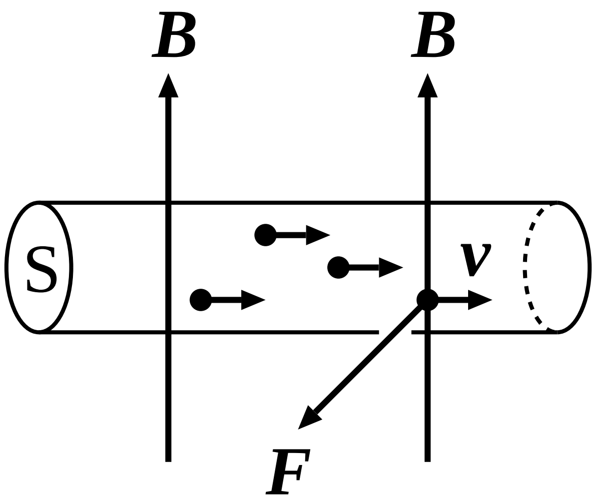
(14) $$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2) = \frac{m}{2}(v_\perp^2+v_{z0}^2) = \text{一定} .$$

(磁場による力は仕事をしない．)

3.2.2 磁場中の電流に働く力

- 磁場中の細い一様な導線を流れる電流を考える．

点電荷 q が平均速度 $\boldsymbol{v}$ で移動していると考えると，1 個の電荷が受ける力は



$$q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,. \tag{15}$$

電荷の数密度を n とすると微小体積 dV の受ける力は，(ndV が電荷の個数)

$$d\boldsymbol{F} = ndV\,q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}\,dV\,. \quad \text{(式 (3. 1. 4))} \tag{16}$$

断面 S について積分すると，

$$d\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}\,dSdr = Id\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}\,. \quad \text{(式 (3. 1. 20))} \tag{17}$$

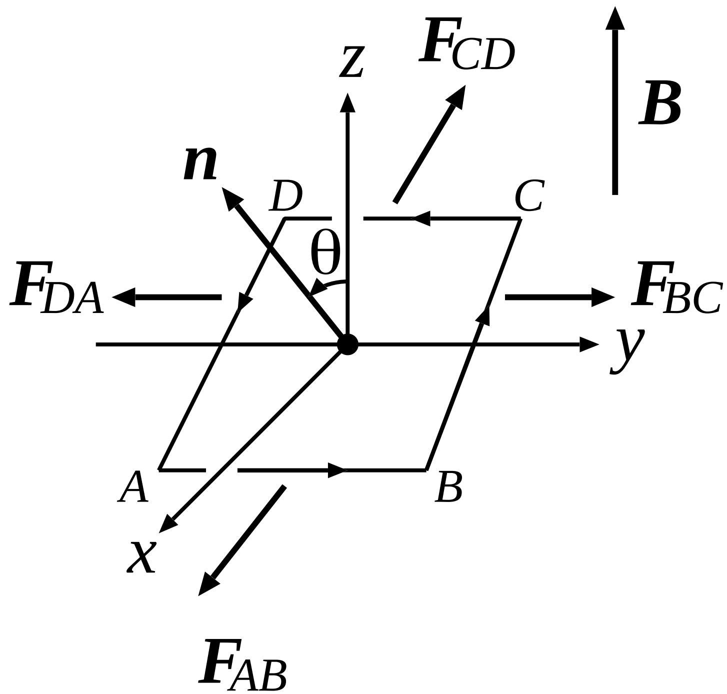
単位長さあたりの力は，$Id\boldsymbol{r} = \boldsymbol{I}dr$ と書けば，

(18) $$\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$$

となる．(q に依存しないことに注意．)

● 例 1: ループ電流に働く力

一様な磁場中の長方形ループ電流 $ABCD$ を考える．$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. $AB = a$, $BC = b$. ループ面は y 軸を通り，その法線ベクトルは z 軸と角度 θ をなす．導線 AB に働く力は，CD に働く力と逆向きで同じ大きさ．BC と DA も同様．従って，ループ全体に働く力はゼロ．しかし，y 軸のまわりに回転させようとする偶力 (トルク) がある．



(19) $$F_{AB} = F_{CD} = IBa\,.$$

よって，トルクは,

(20) $$T = IBa\,b\sin\theta = IabB\sin\theta\,.$$

(21) $$\boldsymbol{m} = Iab\boldsymbol{n} \quad (\text{磁気双極子モーメント})$$

と書くと,

(22) $$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}\,.$$

○ 一般に平面回路 (面積 S，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$) を流れる電流について,

(23) $$\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}\,, \quad \text{単位: Am}^2\,.$$