

第3章 定常電流と静磁場

3.1 電流と電荷保存則

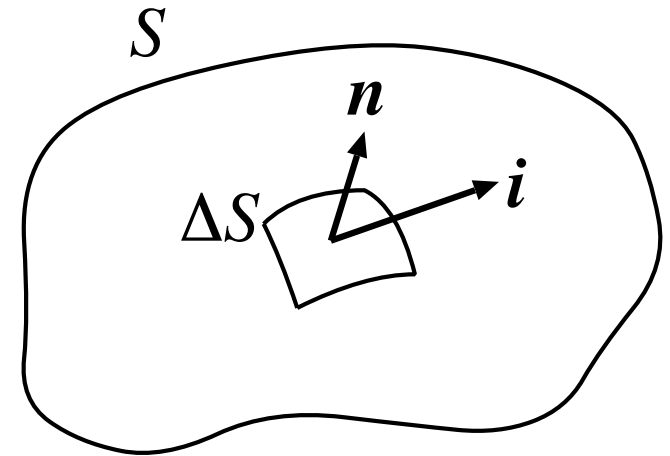
3.1.1 電流と電流密度

- 電流密度 $i(\mathbf{r}, t)$

単位時間に単位面積を (垂直に) 通る電荷の量 (ベクトル) .

単位は $C/(m^2s)$.

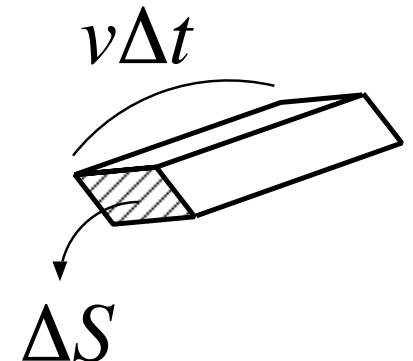
時間 Δt の間に面 ΔS (法線ベクトル \mathbf{n}) を通って流れる電荷の量は ,



(1)
$$\Delta q = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t = \mathbf{i} \cdot \Delta \mathbf{S} \Delta t .$$

一方 , 電荷分布を ρ として , その電荷の平均移動速度を v とすると ,

(2)
$$\Delta q = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t = \rho \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S} \Delta t .$$



よって,

$$(3) \quad \mathbf{i} = \rho \mathbf{v} .$$

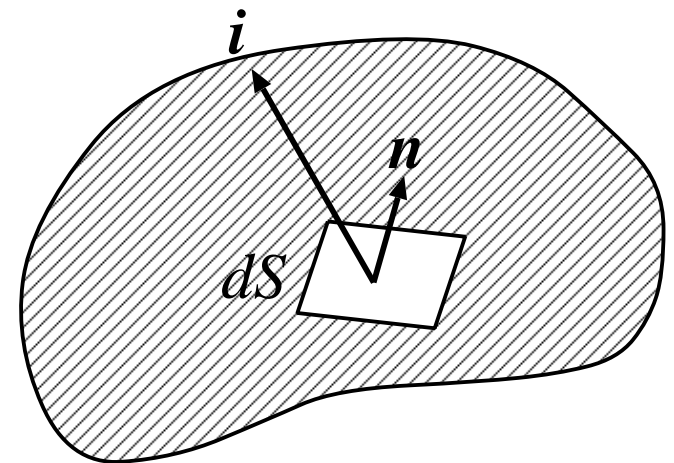
電荷分布が (電子のような) 点電荷からなっていて, その電荷を q , 平均速度を \mathbf{v} , 数密度を n とすると,

$$(4) \quad \mathbf{i} = nq\mathbf{v} .$$

● 電流 I : ある面 S を単位時間に通る電荷の量 .

$$(5) \quad I = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} .$$

単位: A(アンペア) = C/s .



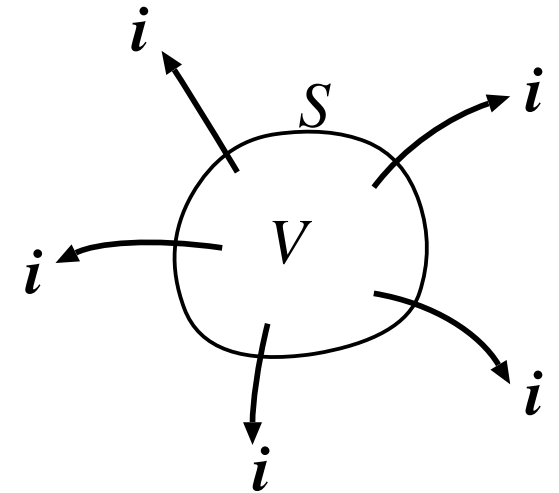
3.1.2 電荷保存則

- 電荷はなくなったりできたりしない。

閉曲面 S から流れ出す電流を考える。

$$(6) \quad I = \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}.$$

これは、 S に囲まれた領域 V 内の単位時間あたりの電荷の減少に等しいはず。



$$(7) \quad \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt}, \quad Q_{\text{int}} = \int_V \rho dV.$$

左辺にガウスの定理を適用すると、

$$(8) \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{i} dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0.$$

V が時間的に変化しなければ, d/dt は積分の中に入れられる:

$$(9) \quad \int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

V は任意ゆえ,

$$(10) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad \text{電荷保存則}$$

連続の方程式の一種になっている.

- 定常電流

$\mathbf{i} = \mathbf{i}(\mathbf{r})$, $\rho = \rho(\mathbf{r})$ (t に依らない). このとき, 式 (10) より,

$$(11) \quad \nabla \cdot \mathbf{i} = 0.$$

定常電流にはわき出しがない. つまり, 閉じた経路に沿って流れるループになっている.

3.1.3 オーム (Ohm) の法則

- 電場をかけると電流が流れるような物質について，オームの法則

$$(12) \quad \mathbf{i}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \sigma : \text{電気伝導率 (物質定数)}$$

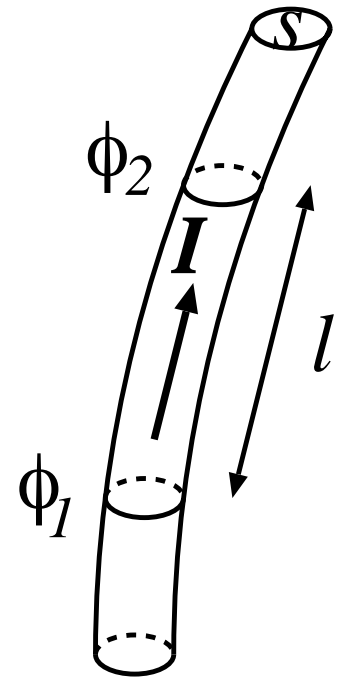
が成り立つ．(成り立たない場合もある．) 定常電流でない場合にも，時間的変動がゆっくりであれば成り立つ．

- 断面積 S の一様な (細い) 導線を考える．
距離 l の 2 点の電位差を $V = \phi_1 - \phi_2$ とし，流れる電流を I とする．電場は，

$$(13) \quad E = \frac{V}{l}.$$

電流密度は，

$$(14) \quad \mathbf{i} = \frac{I}{S}.$$



$i = \sigma E$ より ,

$$(15) \quad \frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{l} .$$

$$(16) \quad R \equiv \frac{l}{\sigma S} : \quad \text{電気抵抗}$$

を用いると ,

$$(17) \quad V = RI , \quad \text{オームの法則 .}$$

R の単位: $V/A \equiv \Omega(\text{オーム})$. σ の単位: $1/(\Omega\text{m})$.

- 電流のする仕事率 (単位時間あたりの仕事)

電場がする仕事は, (ρdV は電荷, $d\mathbf{r}$ は変位)

$$(18) \quad dW = \rho dV \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} .$$

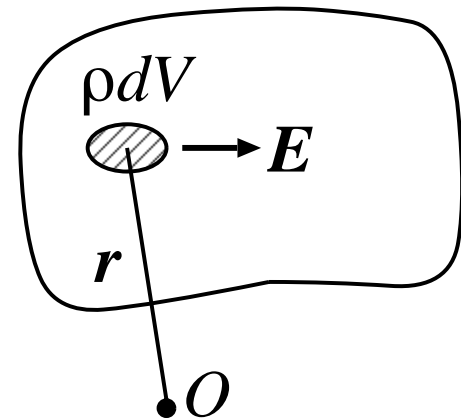
電流の仕事率は, ($\rho d\mathbf{r}/dt = \rho \mathbf{v} = \mathbf{i}$)

$$(19) \quad P = \frac{d}{dt} \int_V dW = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt} dV = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV .$$

オームの法則を用いれば,

$$P = \int \frac{\mathbf{i}^2(\mathbf{r})}{\sigma} dV$$

と書くこともできる .



○ 細い一様な導線の場合 .

E は S 上で一定だから , 断面の積分を実行すると ,

$$(20) \int_S \mathbf{i} dS dr = \mathbf{n} i S dr = I \mathbf{n} dr = I d\mathbf{r} .$$

$I d\mathbf{r} (= I \mathbf{n} dr)$ を電流素片と呼ぶ .

$$(21) P = I \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (\text{W : ワット}).$$

電流のした仕事は , 金属などの場合 , 伝導電子 (自由電子) とイオンとの衝突により , 熱エネルギー (ジュール熱) になる .

