第5章 マクスウェル方程式と電磁波

5.1　マクスウェル(Maxwell)方程式

5.1.1　電場と磁場の双対性(duality)

- これまでに分かった電磁場の基本方程式

(1) $$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,, \quad \text{(ガウスの法則)}$$

(2) $$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0\,,$$

(3) $$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\,, \quad \text{(ファラデーの法則)}$$

(4) $$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,. \quad \text{(アンペールの法則)}$$

○ 式(1)は動的な場合も成り立つ．(理由は以下で．)

(5) $$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})}{\varepsilon_0}\,.$$

○ 式 (2) も同様.

(6) $$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0\,.$$

○ 式 (6) は磁場に対するガウスの法則. “磁荷” が存在しないだけ.
○ 式 (3) は，変化する磁場から電場ができることを表わしている.
○ 式 (4) も式 (5)，(6) のように動的な場に拡張してみよう.

(7) $$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)\,. \quad \text{(誤)}$$

○ 電場と磁場の対応関係 (双対性) を考慮して，式 (3) と (7) を比較してみると，(3) の右辺に (7) の電流に相当する “磁流” がないのは，(6) で “磁荷” がないためと考えられる．(7) の右辺には，(3) の右辺のように，$\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ のような項があると推測される．(変動する電場も磁場を作るだろう．)

5.1.2　変位電流

式 (7) の発散を考えてみる.

(8)
$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)) = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)\,.$$

左辺 $= 0$. これは電荷保存則 (§§3. 1. 2)

(9)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

と矛盾する．式 (5) を用いると,

(10)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0\,.$$

すなわち,

(11)
$$\nabla \cdot \left[\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\right] = 0\,.$$

$\Rightarrow$ 式 (7) で $\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{i} + \varepsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ とすればよい.

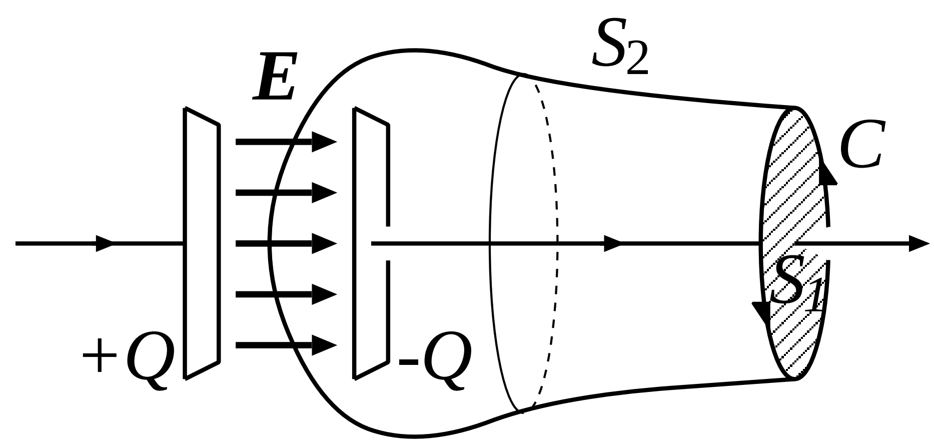
(12) $$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0 \left[\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \right]}$$ **(正)**

アンペール・マクスウェルの法則

(13) $$\boldsymbol{i}_d(\boldsymbol{r},t) \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\,,$$ 変位電流

- 例 1: コンデンサーと変位電流

平行板コンデンサーに電流 $I(t)$ が流れている. 閉曲線 C とそれに囲まれた面 S_1 を考えると,



(14) $$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_{S_1} \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 I\,.$$

(S_1 には電場はないから，変位電流の寄与はない．)
面 S_2 を考えると，そこには(伝導) 電流はないから，

(15) $$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0\varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

(変位電流の寄与のみ．) 極板の電荷を $\pm Q(t)$，面積を S とすると，
(式 (2. 8. 2))

(16) $$E(t) = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\varepsilon_0 S}\,.$$

(17) $$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0\varepsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{I}{\varepsilon_0 S}\int_S dS = \mu_0 I\,.$$

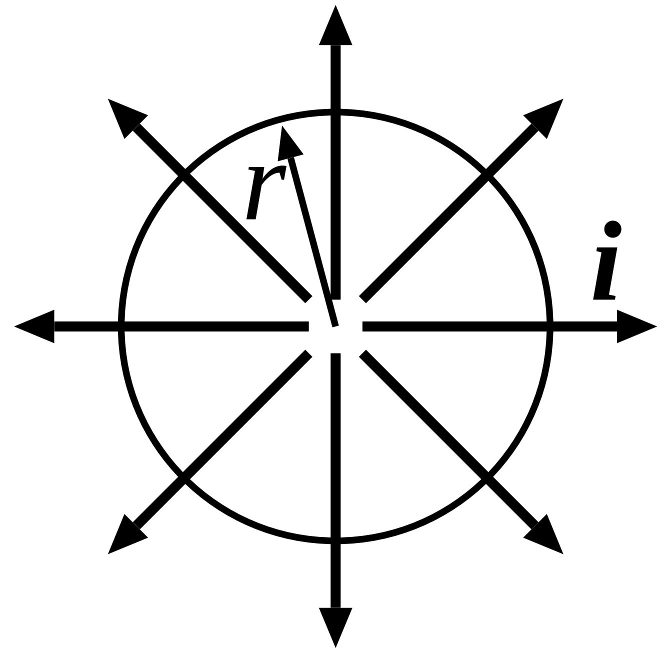
(積分は $\boldsymbol{E}$ のあるところだけ，すなわち極板間のみ．)

もし変位電流を考えないとこれはゼロになり，式 (14) と矛盾.

- 例 2: 球対称で放射状の電流

半径 r の球面 S を考える．この内部の電荷を $Q(r,t)$ とすると，

(18) $$\frac{\partial}{\partial t} Q(r,t) = -4\pi r^2 i(r)\,.$$



S 上の閉曲線 C を考える．S_C を C に囲まれた面として，

(19)

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_{S_C} \left(\boldsymbol{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}$$
$$= \mu_0 \int_{S_C} \left[i(r) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right) \right] dS$$
$$= \mu_0 \int_{S_C} \left[i(r) + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t} \right] dS = 0$$

磁場 (の循環) はできない.

5.1.3 マクスウェル方程式

- 電磁気学の基本方程式をまとめると,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})}{\varepsilon_0}\,, \tag{20}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0\,, \tag{21}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\,, \tag{22}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{23}$$

これらをまとめてマクスウェルの方程式という．これとローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{24}$$

が電磁気学の基本法則となる．

● マクスウェルの方程式に解はあるか？

$$\left(\begin{array}{lll} \text{未知関数} & \boldsymbol{E}\,,\boldsymbol{B} & 6\,\text{個} \\ \text{方程式の数} & & 8\,\text{個} \end{array} \right.$$

○ 式 (23) の発散を考えると，

(25) $$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{i} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{E}\,.$$

左辺 $= 0$．また，電荷保存則から $\nabla \cdot \boldsymbol{i} = -\partial \rho / \partial t$. よって，

(26) $$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0\,.$$

従って，$t = t_0$ で $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t_0) = \rho(\boldsymbol{r}, t_0)/\varepsilon_0$ が成り立てば，任意の時刻 t で式 (20) が成り立つ．すなわち，式 (20) は初期条件として要求するだけでよい．(これが式 (1)⇒ 式 (5) の理由．)

○ 同様に式 (22) の発散を考えると，

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{B}\,. \tag{27}$$

$t = t_0$ で $\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t_0) = 0$ なら，任意の t で $\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0$.

○ 式 (20) と式 (21) が初期条件として成り立っていれば，式 (22) と式 (23) で決定される $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ の時間発展で式 (20)，式 (21) が成り立たなくなるようなことはない.

○ つまり，式 (20)，式 (21) は補助的な方程式で，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$(6 つの未知関数) の時間発展は式 (22)，式 (23)(6 つの方程式) で記述される.