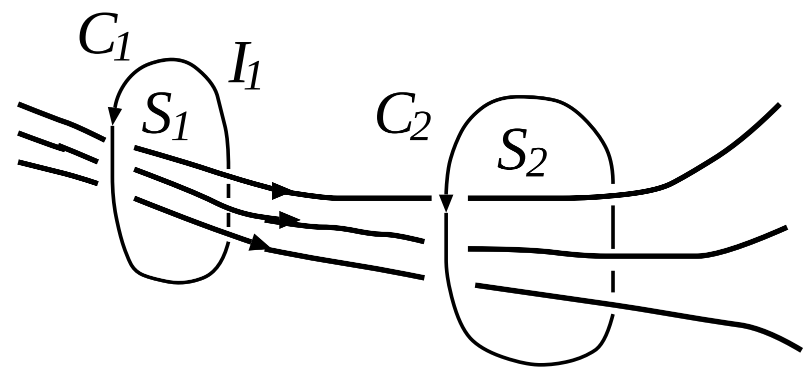
4.2 インダクタンス

4.2.1 相互インダクタンス

- 2 つの回路 C_1，C_2 を考える．C_1 に電流 I_1 を流すと磁束密度 $\boldsymbol{B}_1$(ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_1$) が生じる． このとき，C_2 を貫く磁束は，



(1) $$\Phi_{21} = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 \cdot d\boldsymbol{S}_2 = \int_{S_2} (\nabla \times \boldsymbol{A}_1) \cdot d\boldsymbol{S}_2 = \oint_{C_2} \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}_2) \cdot d\boldsymbol{r}_2$$

$\Leftarrow$ (3. 3. 22)

$$= \oint_{C_2} \left(\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \right) \cdot d\boldsymbol{r}_2$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{r}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \right) I_1 \equiv M_{21} I_1$$

(2) $$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\boldsymbol{r}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|},$$ <u>相互インダクタンス</u>

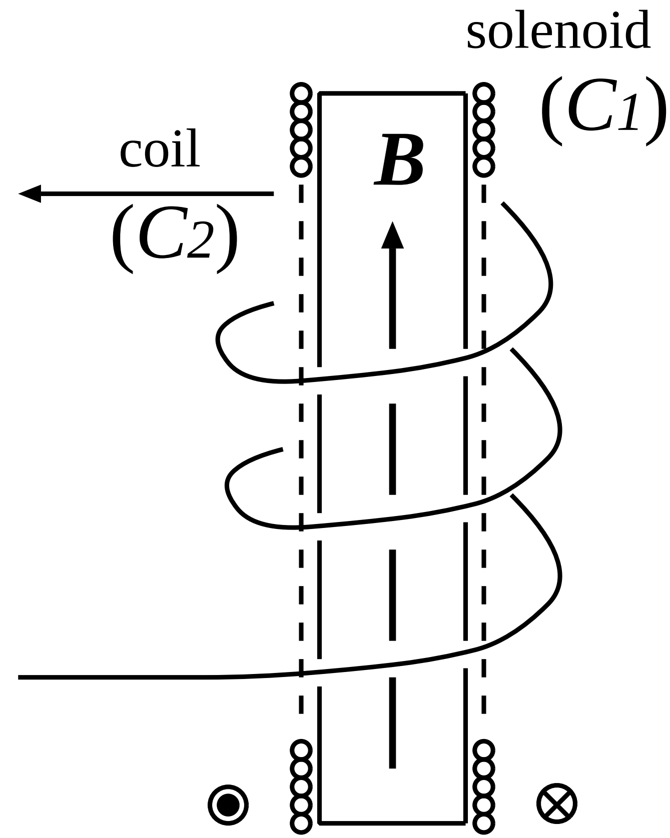
(相互誘導係数)

2 つの回路の形状や相対的配置のみに依る.
逆に C_2 に電流 I_2 を流すと，C_1 を貫く磁束は，(I_2 の作る磁場を $\boldsymbol{B}_2$，ベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}_2$ として)

(3) $$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \int_{S_1} \boldsymbol{B}_2 \cdot d\boldsymbol{S}_1 = \int_{S_1} (\nabla \times \boldsymbol{A}_2) \cdot d\boldsymbol{S}_1 = \oint_{C_1} \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}_1) \cdot d\boldsymbol{r}_1 \\ &= \oint_{C_1} \left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \right) \cdot d\boldsymbol{r}_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\boldsymbol{r}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \right) I_2 = M_{12} I_2 \end{aligned}$$

(4) $$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\boldsymbol{r}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = M_{21} (\equiv M)\,.$$

● 例 1: ソレノイドに巻いたコイル
ソレノイドの断面積 S，巻数 N_1，長さ l，電流 I_1 とし，コイルの巻き数を N_2 とする．



(5) $$B = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1\,.$$

ソレノイドの磁束は BS で，これは全てコイルを N_2 回貫く．よって，

(6) $$\Phi_{21} = N_2 BS = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{l} I_1\,.$$

ゆえに，

(7) $$M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{l}\,.$$

M_{12} を直接計算することは難しいが，式 (4) より，$M_{12} = M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 S/l$ となる．

- インダクタンスの単位

(8) $$1\,\frac{Wb}{A} = 1\,\frac{Vs}{A} \equiv 1\,H\ \text{(ヘンリー)}\,.$$

- 電流 I_1 が変化すると,

(9) $$\Phi_{21}(t) = M I_1(t)\,.$$

このために C_2 に生じる起電力は,

(10) $$\phi_{em,21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}\,.$$

$\Rightarrow C_2$ にも電流が流れる．(逆も同様．)

4.2.2 自己インダクタンス

- I_1 による磁束で C_1 自身を貫くものは I_1 に比例するから,

(11) $\Phi_{11} = M_{11} I_1 = L_1 I_1 \,,\quad L_1 (\equiv M_{11}) :$ 自己インダクタンス

と書ける．同様に,

(12) $$\Phi_{22} = M_{22} I_2 = L_2 I_2 \,.$$

- 回路が 1 つのときは,

(13) $$\Phi = LI \,. \quad (常に\ L > 0)$$

このとき，回路に生じる起電力は,

(14) $$\phi_{em} = -L \frac{dI}{dt} \,.$$

すなわち，インダクタンス (コイル) に電流を流そうとすると，逆起電力が生じる．

- 例 1: ソレノイドの自己インダクタンス

(15)
$$B = \mu_0 n I\,. \qquad (3.\,3.\,58)$$

断面積を S とすると，単位長さ当りの L は,

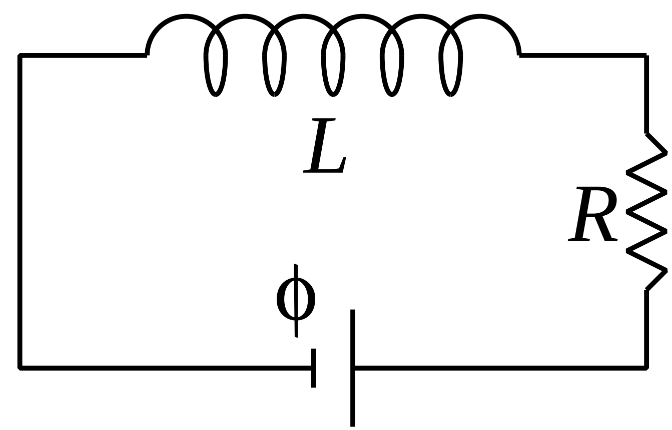
(16)
$$L_{単位} = \frac{\Phi_{単位}}{I} = \frac{nBS}{I} = \mu_0 n^2 S\,.$$

注) これを式 (2) で $C_1 = C_2$ として求めることはできない．一般には導線の太さを考えて，その中での $\boldsymbol{i}$ を用いて計算する必要がある.

- 例 2: RL 回路

回路中の全起電力は式 (14) より,

$$\phi - L\frac{dI}{dt}\,.$$



オームの法則より,

(17) $$RI(t) = \phi - L\frac{dI}{dt}\,.$$

(18) $$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{\phi}{L}\,.$$

$\phi/L = 0$ のときの解は，$ae^{-Rt/L}$．これに定数 b を加えて，

(19) $$I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + b\,.$$

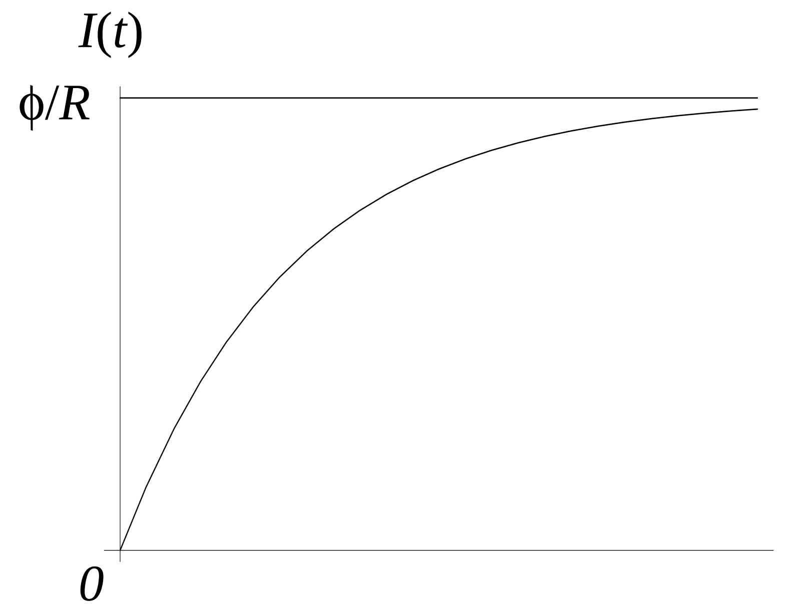
式 (18) に代入して，

(20) $$\frac{R}{L}b = \frac{\phi}{L} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\phi}{R} \quad \Rightarrow \quad I(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\phi}{R}\,.$$

$I(0)=0$ とすると，$a=-\phi/R$.
よって，

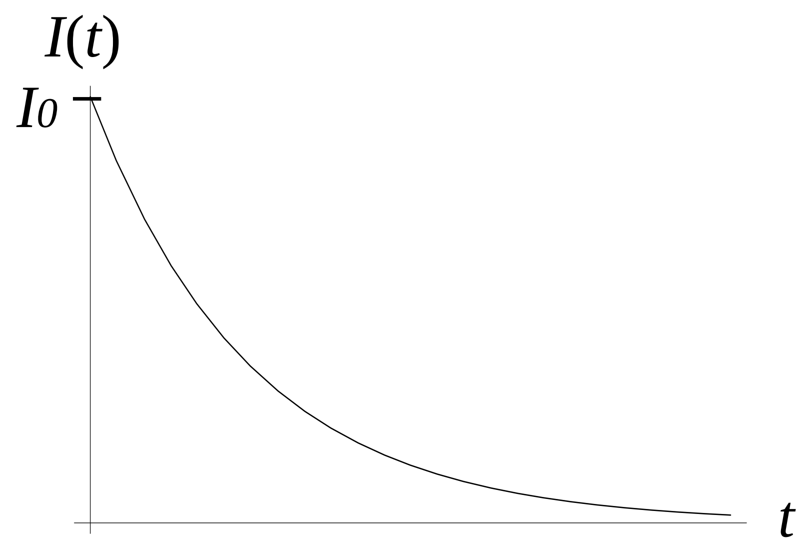
(21) $$I(t)=\frac{\phi}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

$\tau\equiv L/R$ を緩和時間という.



$I(0)=I_0$ で $\phi=0$ のときは，式 (20) より，

(22) $$I(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t}=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



例 3: 変圧器 (トランス) の原理

§§4. 2. 1 の例 1 で，ソレノイド (C_1) に外部起電力 ϕ_1 を与えたとする．

(23) $$\phi_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} = 0\,. \quad \text{(起電力降下の総和はゼロ)}$$

このとき，コイル (C_2) に誘導される起電力 $\phi_{em,21}$ は式 (10).

$$\phi_{em,21} = -M \frac{dI_1}{dt}\,.$$

よって，

(24) $$\frac{\phi_{em,21}}{\phi_1} = -\frac{M}{L_1}\,.$$

式 (7)，(16) を用いると，

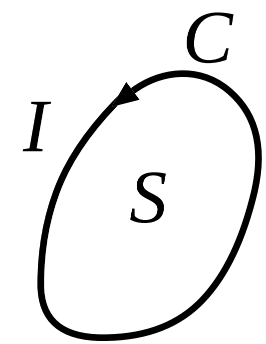
(25) $$\frac{\phi_{em,21}}{\phi_1} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 S/l}{\mu_0 (N_1/l)^2 S l} = -\frac{N_2}{N_1}\,.$$

すなわち，C_2 に発生する起電力は巻数の比に比例する．
(電圧が自由に変えられる．交流の利点．)

4.2.3 インダクタンスのエネルギー

● 1 つの回路の場合

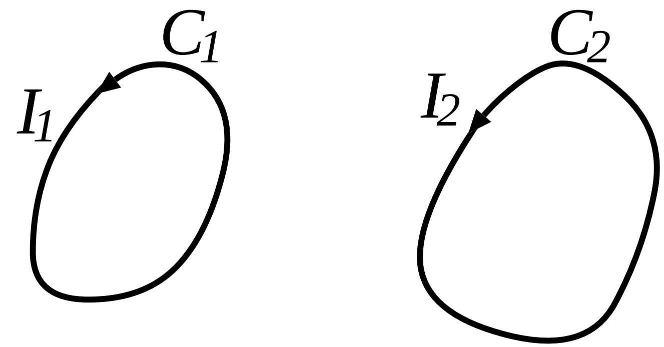
回路 C に電流 I が流れているとき，式 (4. 1. 30) より，



(26)
$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,dV = \frac{1}{2}I\oint_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \\
&\quad (\Leftarrow \text{ ストークスの定理}) \\
&= \frac{1}{2}I\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}I\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}LI^2\,.
\end{aligned}
$$

(Φ は C を貫く磁束で、式 (13) を使った．)

● 2 つの回路の場合



$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,dV \qquad (27)\\
&= \frac{1}{2}I_1\oint_{C_1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)\cdot d\boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{2}I_2\oint_{C_2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)\cdot d\boldsymbol{r}_2
\end{aligned}
$$

(C_1 を貫く磁束)　　(C_2 を貫く磁束)

$$
= \frac{1}{2}I_1(\Phi_{11}+\Phi_{12}) + \frac{1}{2}I_2(\Phi_{21}+\Phi_{22})
$$

(Φ_{1j}, Φ_{2j}: I_j による磁束)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}I_1(L_1I_1 + MI_2) + \frac{1}{2}I_2(MI_1 + L_2I_2)\\
&= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2\,.
\end{aligned}
$$

- 例 1: ソレノイド

単位長さ当りのエネルギーは,

(28)
$$U_{\text{単位}} = \frac{1}{2} L_{\text{単位}} I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 S I^2 \,. \qquad \text{cf. (4. 1. 32)}$$

(逆に (4. 1. 32) からソレノイドの $L_{\text{単位}}$ を求めることもできる．)

- 自己インダクタンスと相互インダクタンスの関係

2 つの回路を考える.

(29)
$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 \left(I_1^2 + 2\frac{M}{L_1} I_1 I_2 \right) + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - \frac{1}{2} L_1 \frac{M^2}{L_1^2} I_2^2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) I_2^2 \end{aligned}$$

回路に電流を流すとき，必ず仕事 (>0) をするから，回路のエネルギーは常に正である．$U>0$ より，

(30) $$L_2 - \frac{M^2}{L_1} > 0 \implies L_1 L_2 > M^2 . \quad (L_1 > 0)$$

(31) $$M = k\sqrt{L_1 L_2}\,,\ k < 1 \text{ (結合係数)}$$

と書ける．