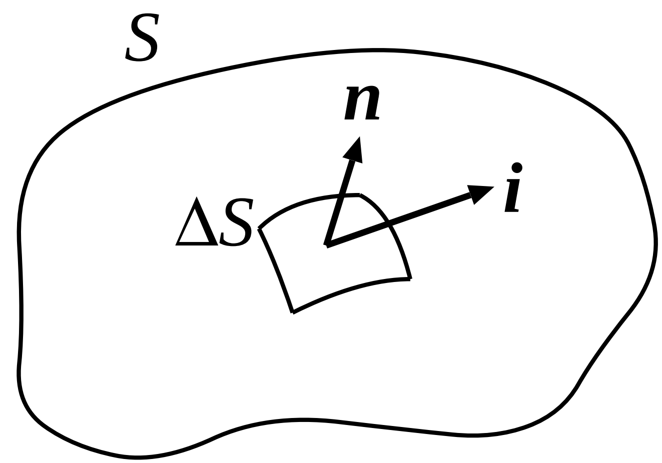
第3章 定常電流と静磁場

3.1 電流と電荷保存則

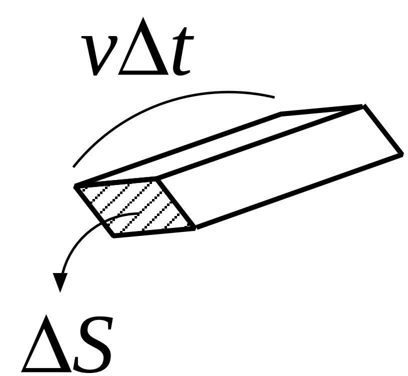
3.1.1 電流と電流密度

● 電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)$
単位時間に単位面積を (垂直に) 通る電荷の量 (ベクトル).
単位は $C/(m^2 s)$.
時間 Δt の間に面 ΔS(法線ベクトル $\boldsymbol{n}$) を通って流れる電荷の量は,



(1) $$\Delta q = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S \Delta t = \boldsymbol{i} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \Delta t\,.$$

一方，電荷分布を ρ として，その電荷の平均移動速度を $\boldsymbol{v}$ とすると,



(2) $$\Delta q = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S \Delta t = \rho \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \Delta t\,.$$

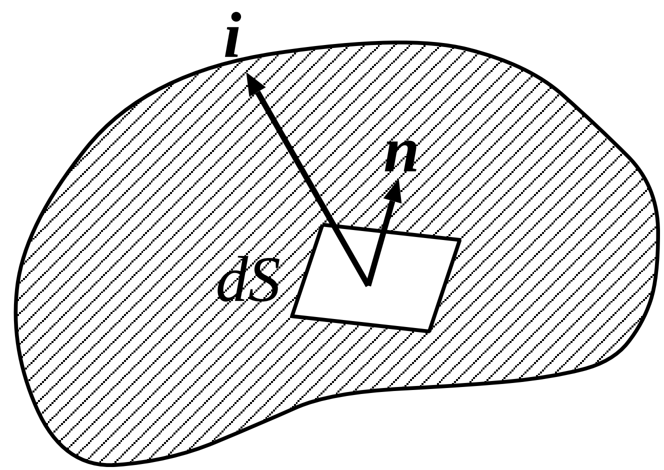
よって,

(3) $$\boldsymbol{i} = \rho \boldsymbol{v}\,.$$

電荷分布が (電子のような) 点電荷からなっていて，その電荷を q, 平均速度を $\boldsymbol{v}$，数密度を n とすると,

(4) $$\boldsymbol{i} = nq\boldsymbol{v}\,.$$

- 電流 I : ある面 S を単位時間に通る電荷の量.



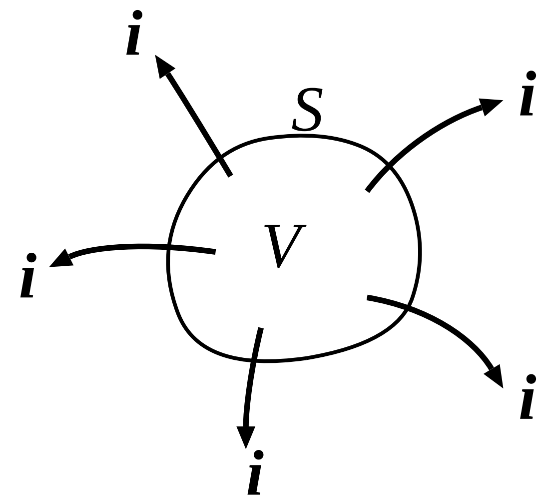
(5) $$I = \int_S \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

単位: A(アンペア) $= C/s$.

3.1.2　電荷保存則

- 電荷はなくなったりできたりしない.

閉曲面 S から流れ出す電流を考える.



$$I = \int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S}\,. \tag{6}$$

これは，S に囲まれた領域 V 内の単位時間あたりの電荷の減少に等しいはず.

$$\int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{dQ_{\mathrm{int}}}{dt}\,, \quad Q_{\mathrm{int}} = \int_V \rho\, dV\,. \tag{7}$$

左辺にガウスの定理を適用すると,

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{i}\, dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = 0\,. \tag{8}$$

V が時間的に変化しなければ，d/dt は積分の中に入れられる:

(9) $$\int_V \left(\nabla \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0\,.$$

V は任意ゆえ，

(10) $$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) = 0\,. \quad \text{電荷保存則}}$$

連続の方程式の一種になっている．

- 定常電流

$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$，$\rho = \rho(\boldsymbol{r})$ (t に依らない)．このとき，式 (10) より，

(11) $$\nabla \cdot \boldsymbol{i} = 0\,.$$

定常電流にはわき出しがない．つまり，閉じた経路に沿って流れるループになっている．

3.1.3　オーム (Ohm) の法則

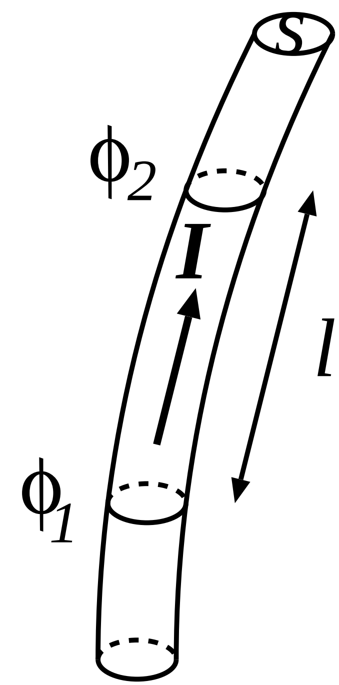
- 電場をかけると電流が流れるような物質について，オームの法則

(12) $$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,, \quad \sigma:\ \text{電気伝導率 (物質定数)}$$

が成り立つ．(成り立たない場合もある．) 定常電流でない場合にも，時間的変動がゆっくりであれば成り立つ．

- 断面積 S の一様な (細い) 導線を考える．

距離 l の 2 点の電位差を $V = \phi_1 - \phi_2$ として，流れる電流を I とする．電場は,



(13) $$E = \frac{V}{l}\,.$$

電流密度は,

(14) $$i = \frac{I}{S}\,.$$

$i = \sigma E$ より,

(15) $$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{l} \,.$$

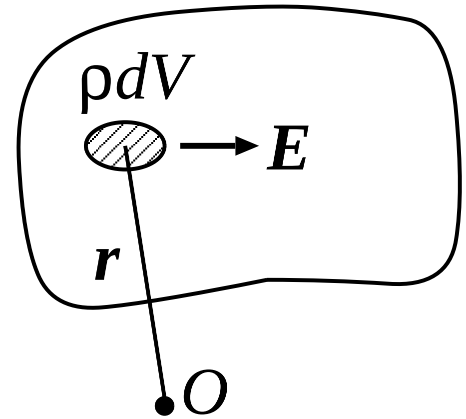
(16) $$R \equiv \frac{l}{\sigma S} \ : \quad \text{電気抵抗}$$

を用いると,

(17) $$V = RI \,, \quad \text{オームの法則} \,.$$

R の単位: $V/A \equiv \Omega$(オーム). σ の単位: $1/(\Omega m)$.

● 電流のする仕事率 (単位時間あたりの仕事)



電場がする仕事は，($\rho\, dV$ は電荷，$d\boldsymbol{r}$ は変位)

(18) $$dW = \rho\, dV\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

電流の仕事率は，($\rho\, d\boldsymbol{r}/dt = \rho \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}$)

(19) $$P = \frac{d}{dt}\int_V dW = \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \rho \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dV = \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\, dV\,.$$

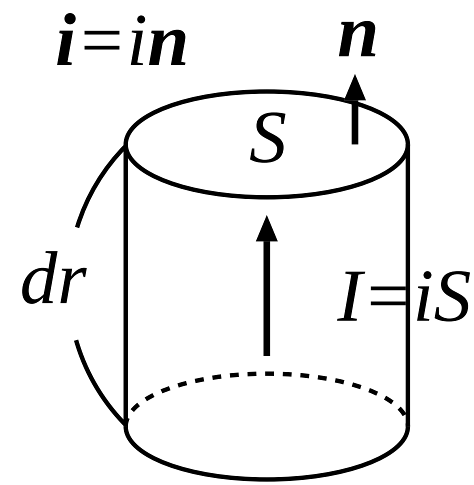
オームの法則を用いれば,

$$P = \int \frac{\boldsymbol{i}^2(\boldsymbol{r})}{\sigma}\, dV$$

と書くこともできる.

○ 細い一様な導線の場合.

$\boldsymbol{E}$ は S 上で一定だから，断面の積分を実行すると，



(20) $$\int_S \boldsymbol{i}\, dS\, dr = \boldsymbol{n}\, iS\, dr = I\boldsymbol{n}dr = I d\boldsymbol{r}\,.$$

$Id\boldsymbol{r}(= I\boldsymbol{n}dr)$ を電流素片と呼ぶ.

(21) $$P = I\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} \quad (W：\ \text{ワット})\,.$$

電流のした仕事は，金属などの場合，伝導電子 (自由電子) とイオンとの衝突により，熱エネルギー (ジュール熱) になる.