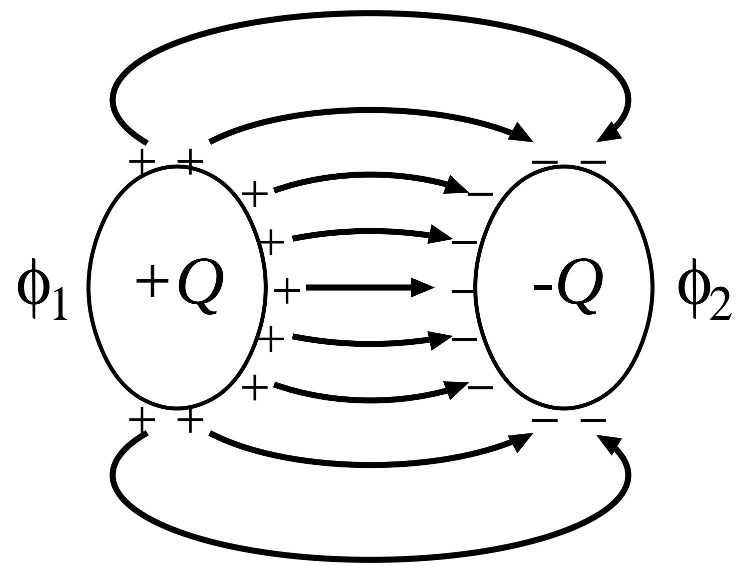
2.8　コンデンサー (condenser, capacitor)

2.8.1　コンデンサーの静電容量

- コンデンサーとは：

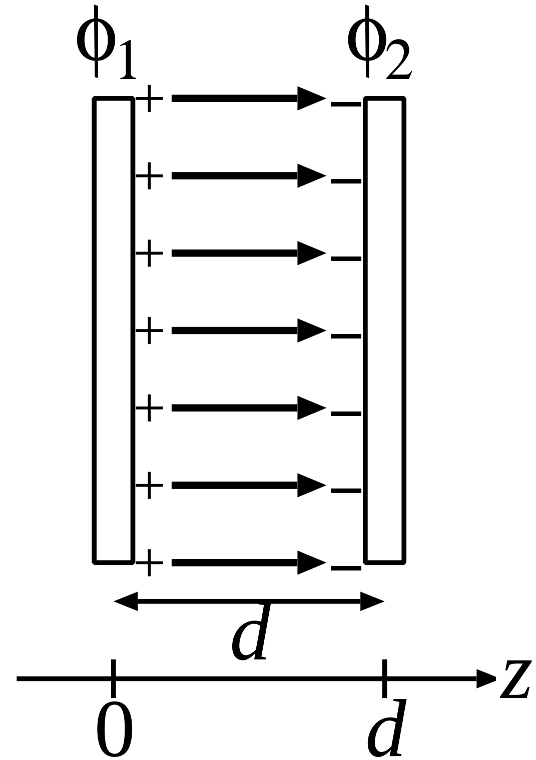
2 つの導体があってそれぞれに $+Q$, $-Q$ の電荷があり，一方から出た電気力線が必ず他方に入るような系.
2 つの導体をその大きさに較べて十分近づけると (近似的に) コンデンサーになる.
導体 1(2) の電位を $\phi_{1(2)}$ とすると，
$Q \propto \phi_1 - \phi_2$. ($\because$ 重ね合わせの原理)



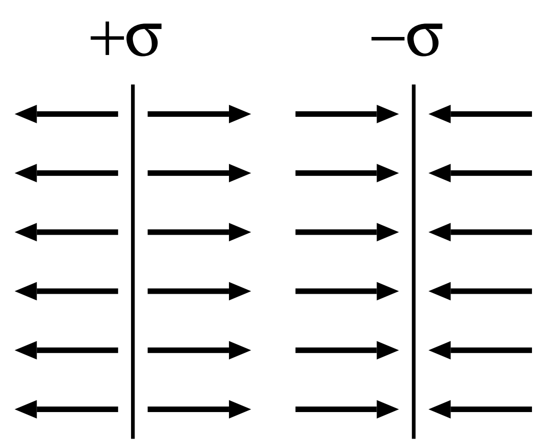
(1)
$$\boxed{C \equiv \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \ : \ \text{静電容量 (電気容量)}}$$

単位は F(ファラッド) $= C$(クーロン)$/V$(ボルト).

● 例 1: 平行板コンデンサー



極板 (導体板) の大きさに較べて d が十分小さいとすれば，端の効果は無視できて，無限に広い導体板についての結果を利用できる．
§§2. 5. の例 3 から，電荷面密度 σ，$-\sigma$ の 2 枚の導体板を平行にして置くと，重ね合わせの原理から，導体板間の電場は導体板に垂直で一様．その大きさは式 (2. 5. 33) より，



(2) $$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,.$$

両導体板の外側では，

(3) $$\boldsymbol{E} = 0\,.$$

電位差は,

(4) $$\phi_1 - \phi_2 = -\int_2^1 \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_d^0 E_z\, dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

極板の面積を A とすると，極板の電荷は,

(5) $$Q = \sigma A = \frac{\varepsilon_0 A}{d}(\phi_1 - \phi_2)\,.$$

(確かに電位差に比例している．)

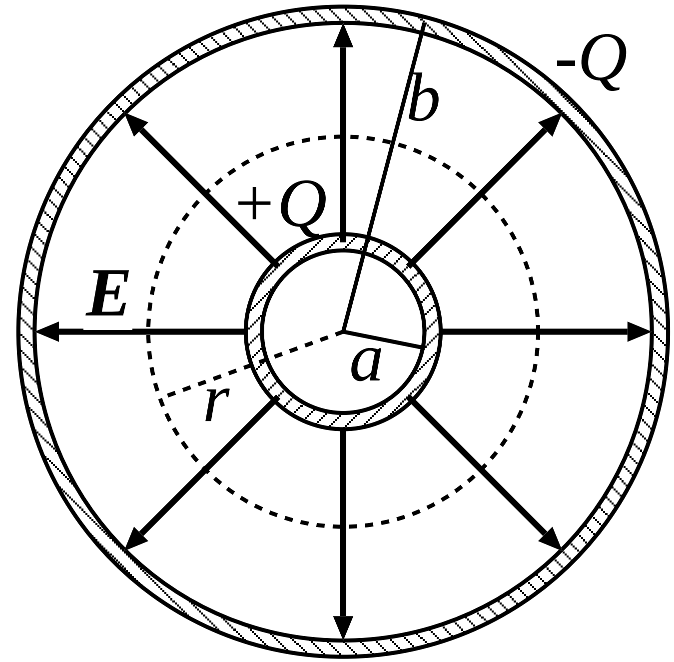
(6) $$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$ ： 平行板コンデンサーの静電容量.

○ $A = 1m^2$， $d = 10^{-4}m (= 0.1mm)$ とすると,

(7) $$C \simeq 9 \times 10^{-12} \cdot \frac{1}{10^{-4}} \sim 10^{-7} F = 0.1 \mu F$$

● 例 2: 球形コンデンサー (同心導体球面)

内側の導体: 半径 a，電荷 $+Q$.
外側の導体: 半径 b，電荷 $-Q$.
対称性から $\boldsymbol{E}$ は動径方向を向き，その大きさは $E = E(r)$ (r のみの関数．)
積分形のガウスの法則



(8) $$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

を半径 r($a < r < b$) の球面に適用すると，

(9) $$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \, .$$

よって，

(10) $$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \, .$$

これを積分して，電位差は，

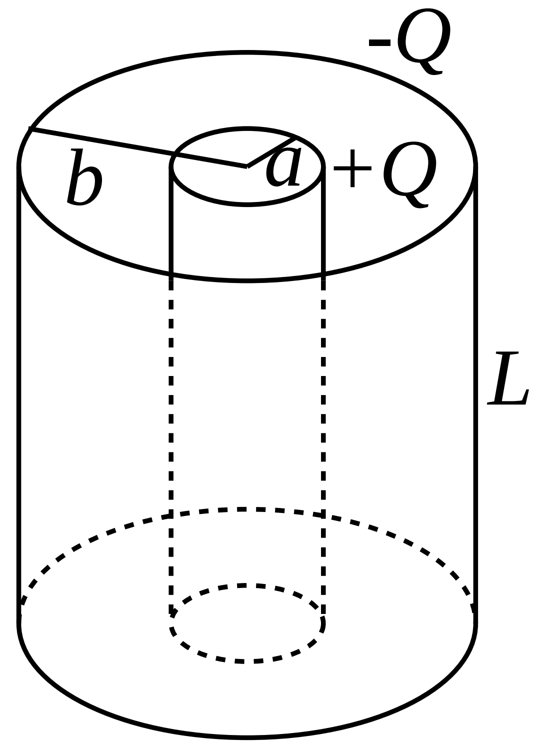
$$\phi(a) - \phi(b) = -\int_b^a E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}\,. \tag{11}$$

静電容量は，

$$C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(b)} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}\,. \tag{12}$$

● 例 3: 円筒形コンデンサー

十分に長い 2 つの同軸円筒極板からなるコンデンサーを考える．長さ L，内側の極板の半径 a，外側の極板の半径 b とし，内側の極板に電荷 $+Q$，外側の極板に電荷 $-Q$ を与える．
$\boldsymbol{E}$ は中心軸に垂直で動径方向を向き，$E = E(R)$ (R: 中心軸からの距離).
半径 R($a < R < b$)，長さ L の円筒を考えて，ガウスの法則を適用すると，



(13)
$$2\pi RLE(R) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

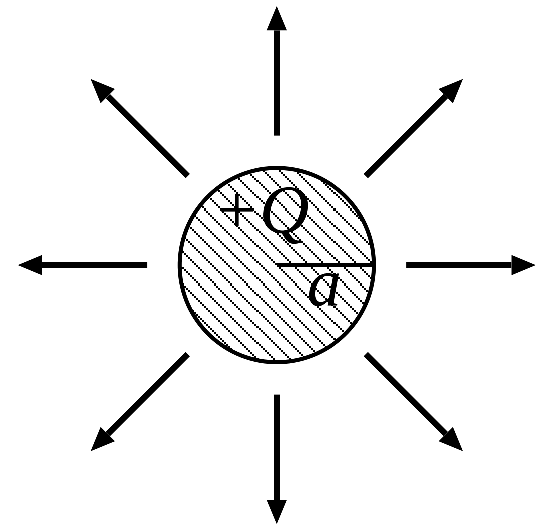
よって,

(14)
$$E(R) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{1}{R}\,.$$

(15)
$$\phi(a) - \phi(b) = -\int_b^a E(R)\,dR = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\log\frac{b}{a}\,.$$

(16)
$$C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(b)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\log(b/a)}\,.$$

例 4: 孤立した導体球の静電容量



半径 a，電荷 Q とする．仮想的に半径無限大の球面に $-Q$ の電荷があると考える．

(17) $$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,,\ (r > a)\,.$$

ポテンシャルは $r = \infty$ でゼロとして，

(18) $$\phi(a) - \phi(\infty) = -\int_\infty^a E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

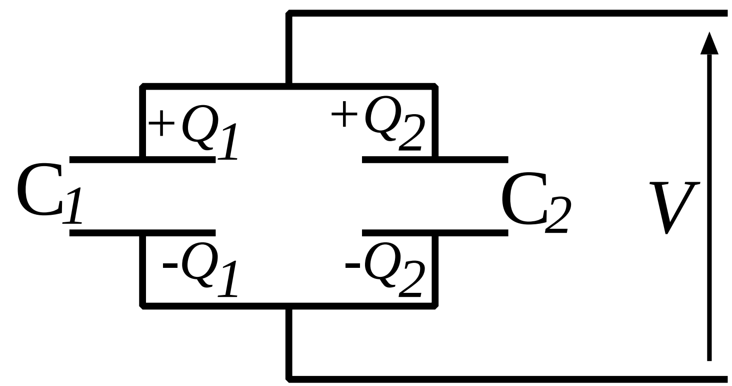
(19) $$C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(\infty)} = 4\pi\varepsilon_0 a\,.$$

2.8.2　容量の合成則

- 並列に接続した場合:

電位差を V として，$Q = CV$ から，

(20) $Q_1 = C_1 V\,,\ Q_2 = C_2 V\,.$

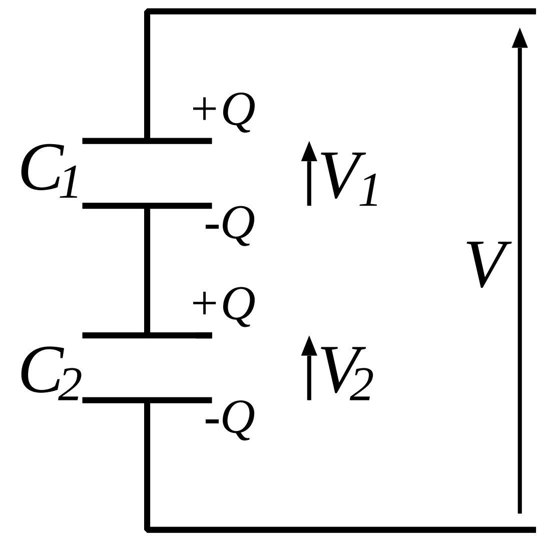


全体の容量 C は,

(21) $Q_1 + Q_2 = CV\,.$

(22) $C = \dfrac{Q_1 + Q_2}{V} = C_1 + C_2\,.$

- 直列に接続した場合:



C_1 の電位差 V_1，C_2 の電位差 V_2.

(23) $$Q = C_1 V_1\,,\ Q = C_2 V_2\,,$$

$$V = V_1 + V_2\,,$$

より，全体の容量 C は,

(24) $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{C_1} + \dfrac{Q}{C_2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,.$$

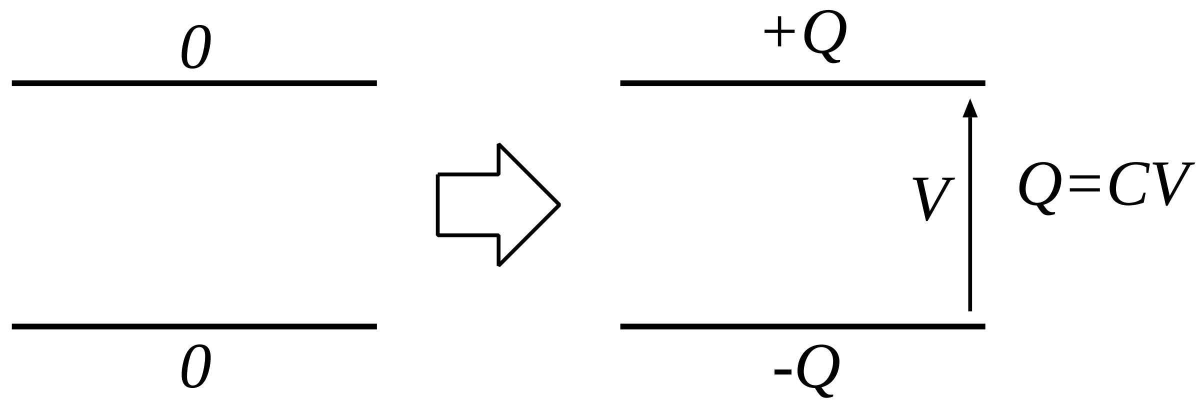
注:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

とも書ける.

2.8.3 コンデンサーのエネルギー

微少電荷 dQ を下の極板から上の極板へ運ぶのに必要な仕事は,



(25)
$$dU = V\,dQ = \frac{Q}{C}dQ\,.$$

これを積分して,

(26)
$$\boxed{U = \int_0^Q \frac{Q'}{C}\,dQ' = \frac{Q^2}{2C} \;:\; \text{コンデンサーのエネルギー}}$$

$Q = CV$ を用いると,

(27)
$$\boxed{U = \frac{1}{2}CV^2}$$

● 例 1: 帯電した孤立導体球のエネルギー

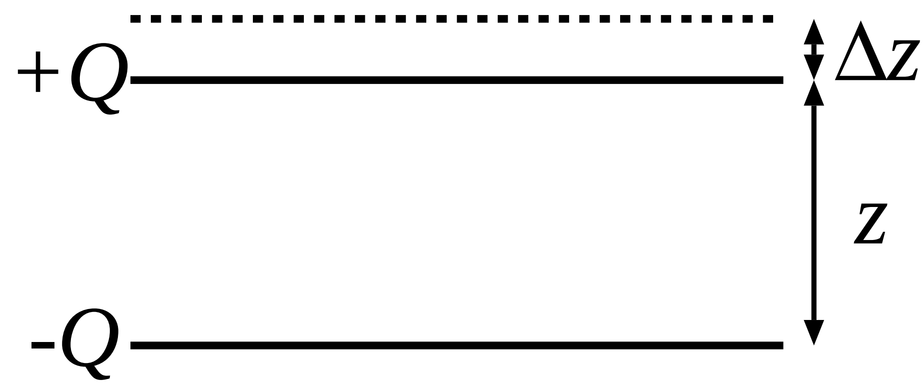
半径 a，電荷 Q とすると，式 (19) より，

(28) $$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

● 平行板コンデンサーの極板間に働く力

極板間の距離を Δz だけ増やすのに必要な仕事は，(力の大きさを F として)

(29) $$\Delta W = F\Delta z\,.$$



このときのコンデンサーのエネルギーの変化は，$U = Q^2/(2C)$ から，(Q は変化しないから)

(30) $$\Delta U = \frac{Q^2}{2}\Delta\left(\frac{1}{C}\right)\,.$$

よって，

$$F\Delta z = \frac{Q^2}{2}\Delta\left(\frac{1}{C}\right). \tag{31}$$

すなわち，

$$F = \frac{Q^2}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dz}. \tag{32}$$

(容量の変化だけが分かればよい．) $C = \varepsilon_0 A/z$ (式 (6)) であるから，

$$F = \frac{Q^2}{2}\frac{1}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C}\frac{1}{z}. \tag{33}$$

2.8.4 誘電体 (Dielectrics)

コンデンサーの極板間を絶縁体 (電気を通さない物質，自由な電荷のない物質) で満すと，静電容量が変化し κ 倍となる．(極板間の電場が変化するため．) このような物質を <u>誘電体</u> という．

(34) $$\kappa = \frac{C}{C_0}\,.\ (C_0\ \text{は元の容量})$$

(コンデンサーの形状には依らない．誘電体の種類に依る．)

平行板コンデンサーでは，極板間が真空のとき，$C_0 = \varepsilon_0 A/d$ であったから，$\varepsilon_0 \to \varepsilon$ と変化したと考えられる．すなわち，誘電体で極板間を満すと，

(35) $$C = \varepsilon \frac{A}{d}\,, \quad \varepsilon:\ \text{誘電率 (物質定数)}\,.$$

よって,

(36) $$\kappa = \frac{C}{C_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \ : \ 比誘電率\,.$$

○ 比誘電率の例

	κ
雲母	~ 9
パラフィン	~ 2
エチルアルコール	~ 20
水	~ 80
空気	1.005 (1 気圧 20$^\circ C$)
(真空)	(1)

通常 $\kappa > 1$ となる.