

## 2.5 ガウス (Gauss) の法則

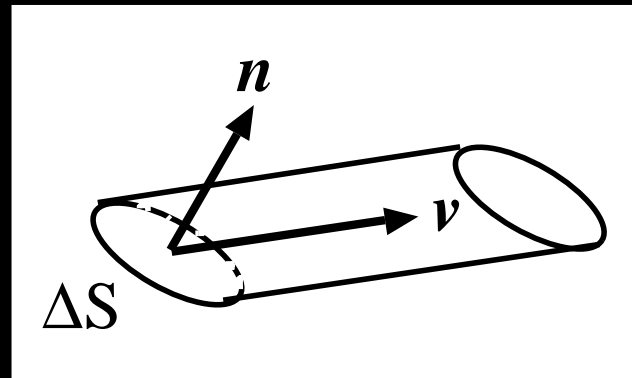
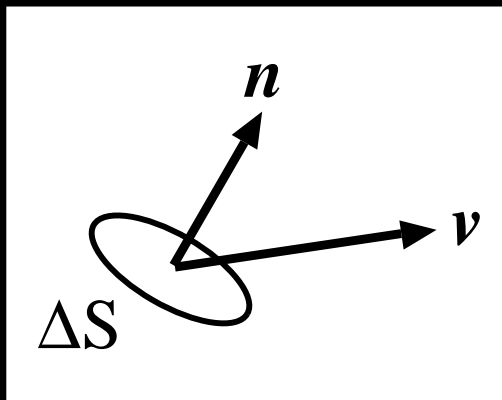
### 2.5.1 ベクトル場の面積分と流束 (flux)

各点での速度が  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  (ベクトル場) で与えられるような流体を考える。

小さな面  $\Delta S$  を考え、その法線方向の単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  とする。単位時間に  $\Delta S$  を通って流れる流体の量は、 $v_n$  を  $\mathbf{v}$  の  $\mathbf{n}$  方向成分として、

$$(1) \quad v_n \Delta S = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S}, \quad \mathbf{n} \Delta S \equiv \Delta \mathbf{S}.$$

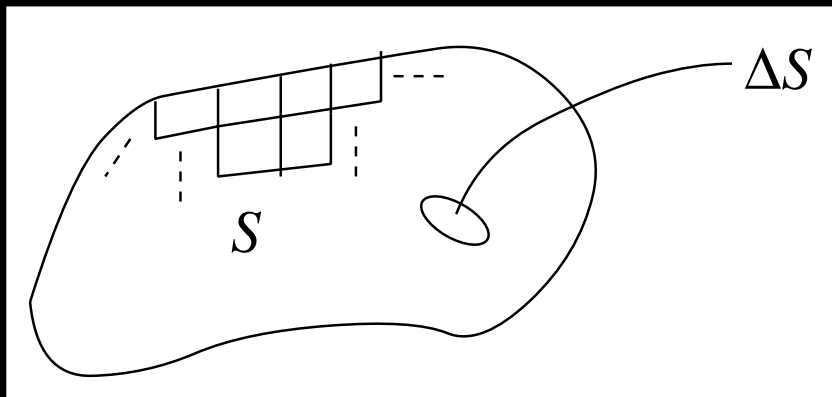
となる。



一般の面  $S$  について，単位時間に  $S$  を通って流れる流体の量は， $S$  を多数の小さな面  $\Delta S_i$  に分割して考えれば，

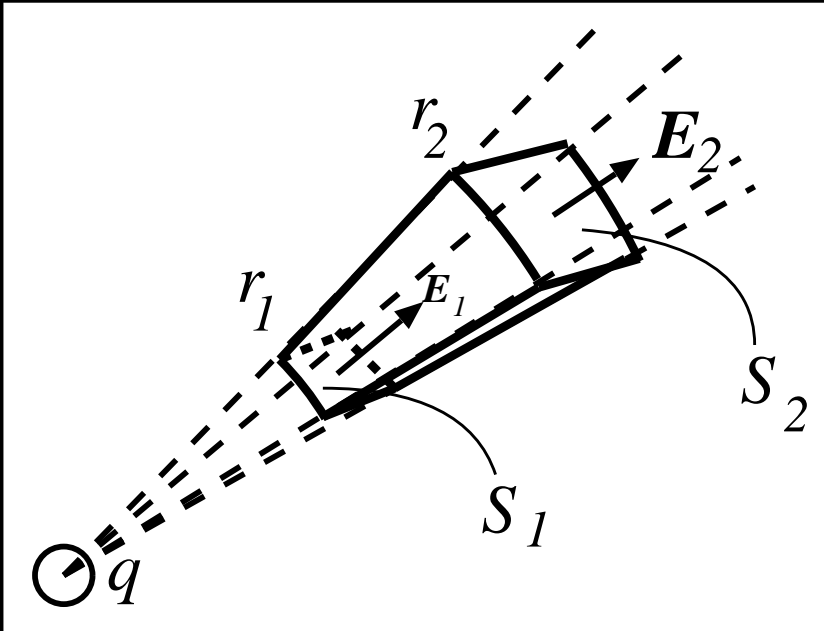
$$(2) \quad \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

これを  $S$  を通る流束 (flux) と言う.



## 2.5.2 ガウスの法則 (積分形)

- 流束の考え方を電場にも当てはめてみる. (実際には何も流れていないけれども.)
- 正の点電荷  $q$  が 1 個ある場合.



図のような半径  $r_1$  と  $r_2$  の球面の一部で挟まれた領域の表面  $S$  (閉曲面) を考える.

$$(3) \quad S = S_1 + S_2 + \text{側面}$$

側面を通る電場は明らかにゼロ.

$$(4) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

閉曲面の場合，法線ベクトルは外向きにとる．

$$(5) \quad \int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1^2} \int_{S_1} dS$$

$$(6) \quad \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2^2} \int_{S_2} dS$$

$$(7) \quad \frac{\int_{S_1} dS}{\int_{S_2} dS} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

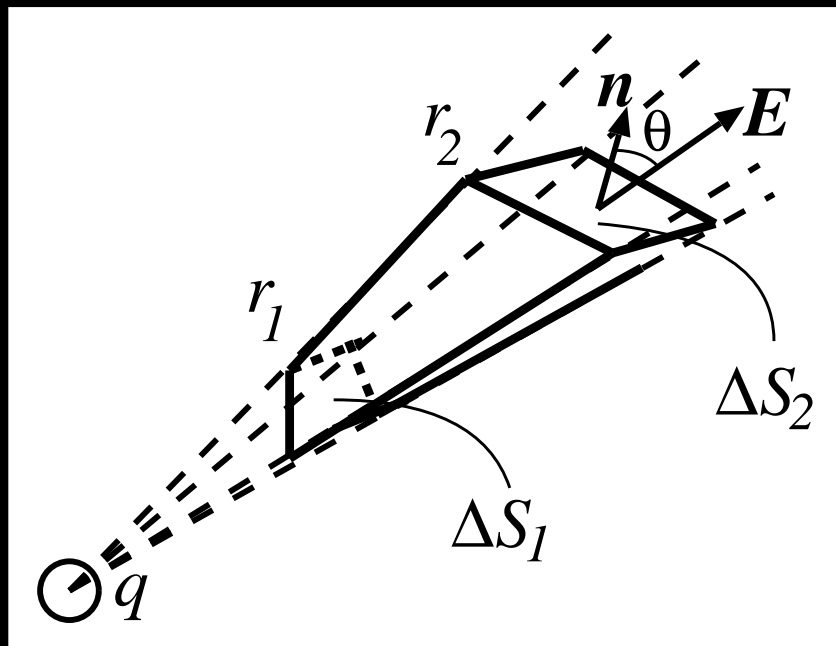
ゆえ，

$$(8) \quad -\int_{S_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

すなわち，

$$(9) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

次に，中心部分の角度が小さいとして， $S_1$ ， $S_2$  が動径について“傾いて”いる場合を考えよう．

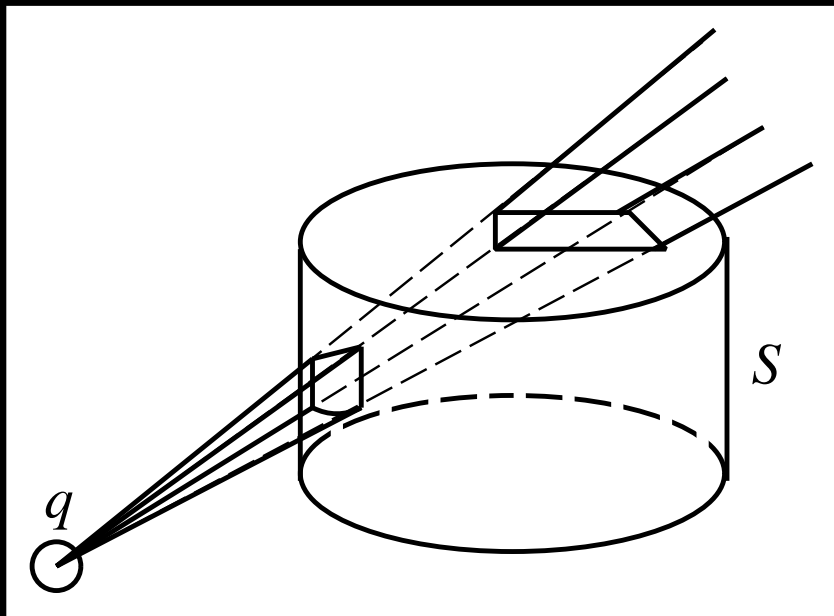


$\Delta S_i$  の面積は傾いていないときの  $1/\cos \theta$  倍になる． $\Delta S_i$  は小さいから  $\mathbf{E}$  の値はその上で一定とみなせ， $\mathbf{E}$  の法線成分は  $E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E \cos \theta$ ．  
よって，

$$(10) \quad -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}_1 = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}_2$$

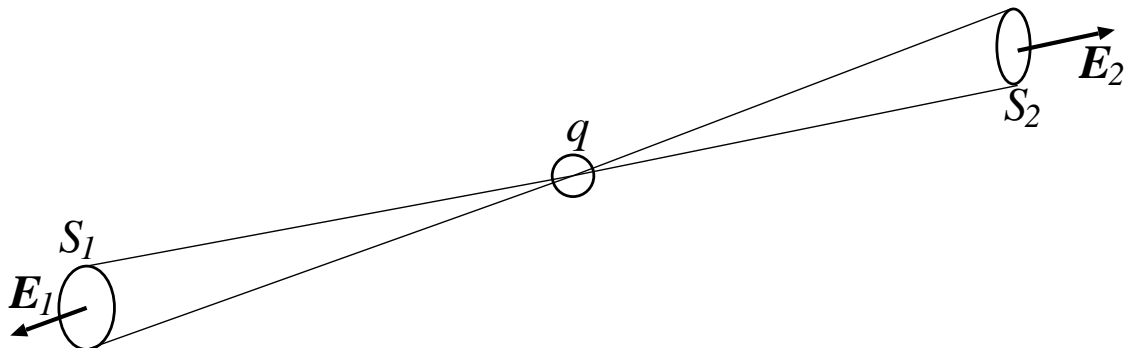
式 (9) が成り立つ．

内部に電荷  $q$  を含まないような一般の閉曲面  $S$  についても，図のような小錐体の集まりを考えれば，下面と上面で流束は打ち消し合う。

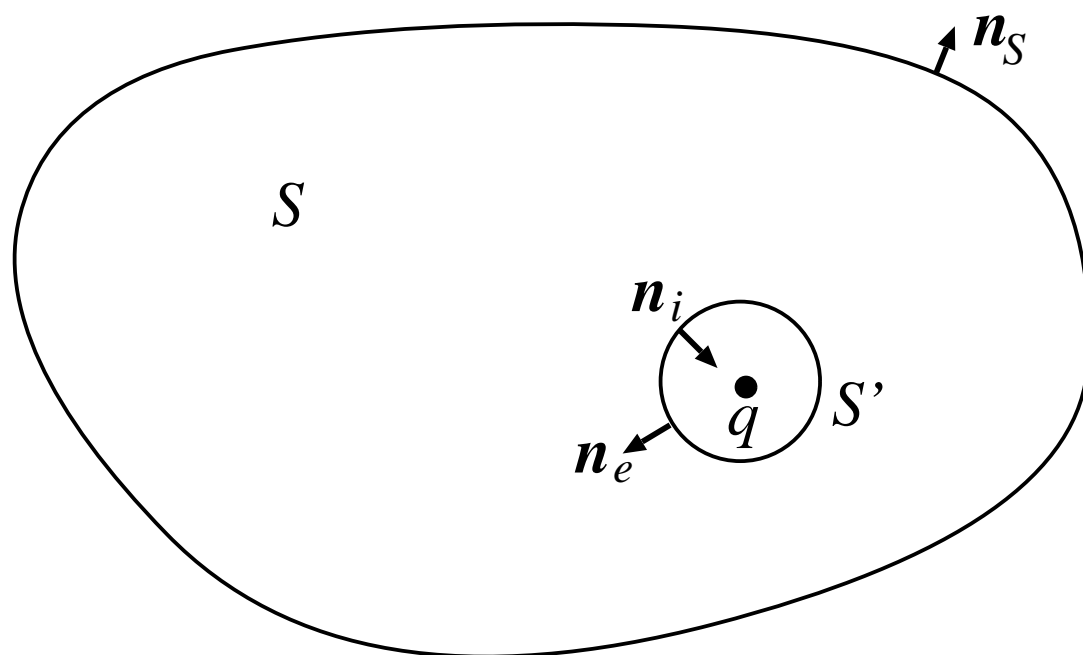


$$(11) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad S \text{ は } q \text{ を含まない閉曲面.}$$

$S$ が $q$ をその内部に含む場合, 明らかに $S_1$ と $S_2$ の寄与は打ち消さない.



そこで,  $q$ を囲む小さな面 $S'$ を考え $S$ の内部から $S'$ の内部を取り除く.



この中空の領域については, ( $q$  を含まないから)

$$(12) \quad \int_{S+S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

が成り立つ. (このとき,  $S'$  の法線ベクトルは内向きの  $\mathbf{n}_i$ . )  
 $S'$  の法線ベクトルを外向きの  $\mathbf{n}_e$  にとることにすれば,

$$(13) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

(すなわち,  $S$  を通る流束は  $S'$  を通る流束に等しい. )  
 $S'$  の形は任意だから, 半径  $r$  の球面を考えることにすると,

$$(14) \quad \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} (= N \leftarrow \text{電気力線の本数}).$$

(うまく,  $r$  に依らない数になっている. )



式 (13) より,

$$(15) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad S \text{ は } q \text{ を含む閉曲面.}$$

まとめると,

$$(16) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0, & q \text{ が } S \text{ の外部にあるとき} \\ q/\epsilon_0, & q \text{ が } S \text{ の内部にあるとき} \end{cases}$$

( $S$  は任意の閉曲面.)

- 点電荷が複数あるとき.

$$(17) \quad \mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$$

から,

$$(18) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i \in \text{内部}} \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0},$$

$$Q_{\text{int.}} \equiv \sum_{i \in \text{内部}} q_i = S \text{ の内部にある電荷の和.}$$

- 連続的な電荷分布の場合。(和を積分に置き換えればよい。)

$$(19) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0}, \quad Q_{\text{int.}} \equiv \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

ただし,  $V$  は  $S$  の内部の領域.

- まとめ

### 積分形のガウスの法則

$$(20) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} \quad Q_{\text{int.}} \equiv S \text{ の内部の電荷}$$

$1/r^2$  則の帰結

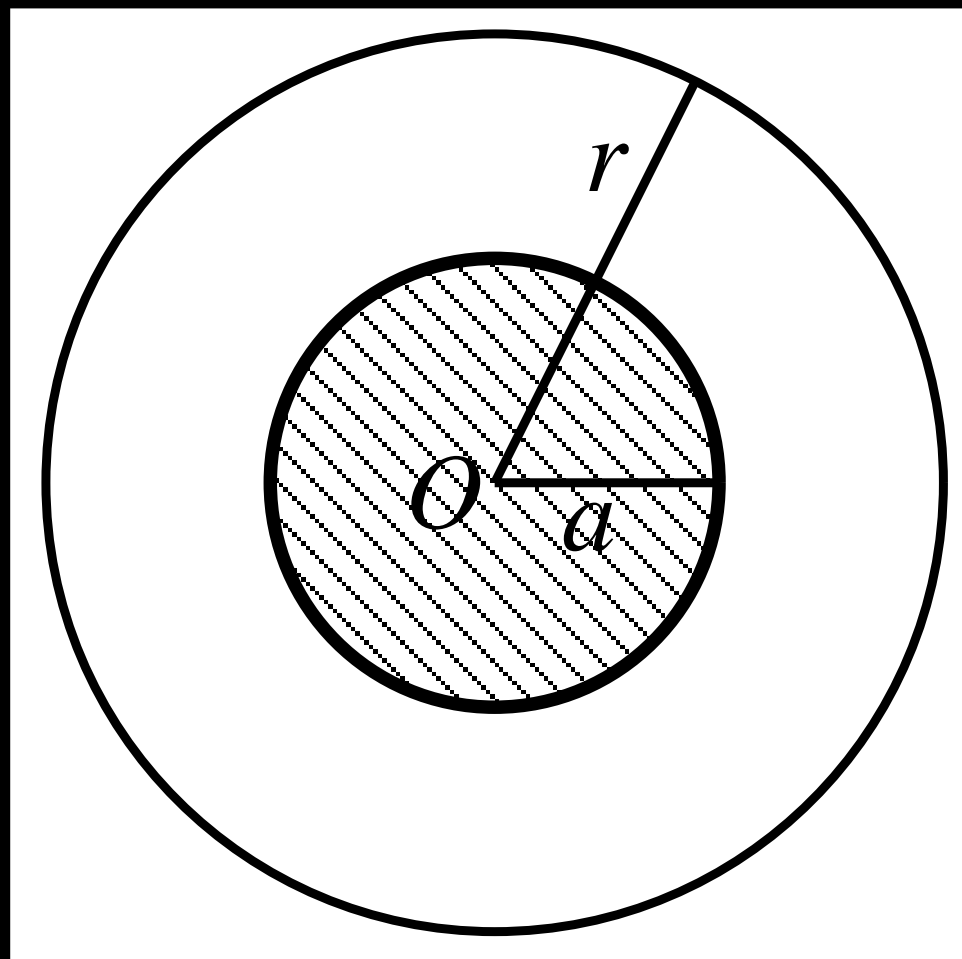
- 例 1: 一様な球状電荷分布

原点  $O$  を中心とする半径  $a$  の球の内部に電荷が一様に分布しているとする. 全電荷を  $Q$ ,  $r \leq a$  での電荷 (体積) 密度を  $\rho$  とすると,

$$(21) \quad Q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho.$$

中心  $O$ , 半径  $r (> a)$  の球面を  $S$  としてガウスの法則を適用すると,

$$(22) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



対称性から、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は動径方向を向き、 $S$  上では一定の大きさ  $E(r)$  を持つから、

$$(23) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r)$$

よって、

$$(24) \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > a.$$

(中心に点電荷  $Q$  があるときと同じ。)

$r < a$  のときは、ガウスの法則は、

$$(25) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

左辺は上と同じで、

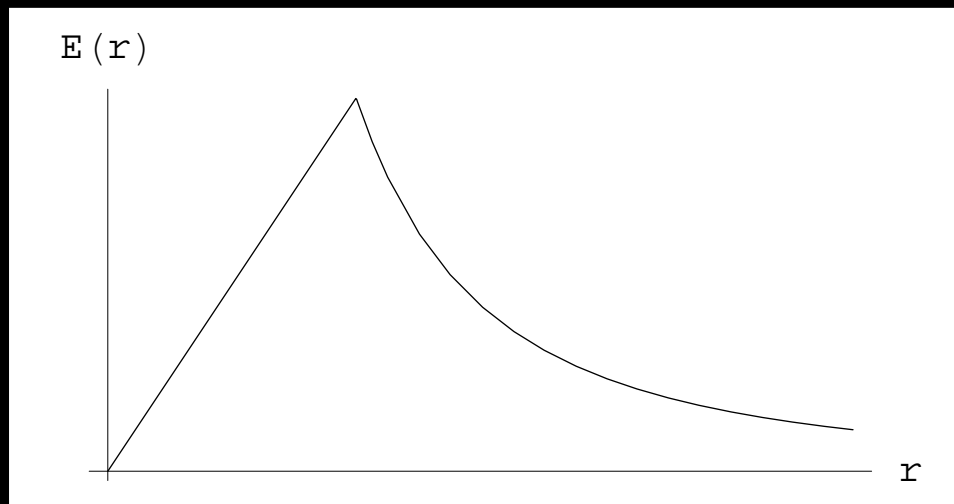
$$(26) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r).$$

よって,

$$(27) \quad E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r.$$

まとめると,

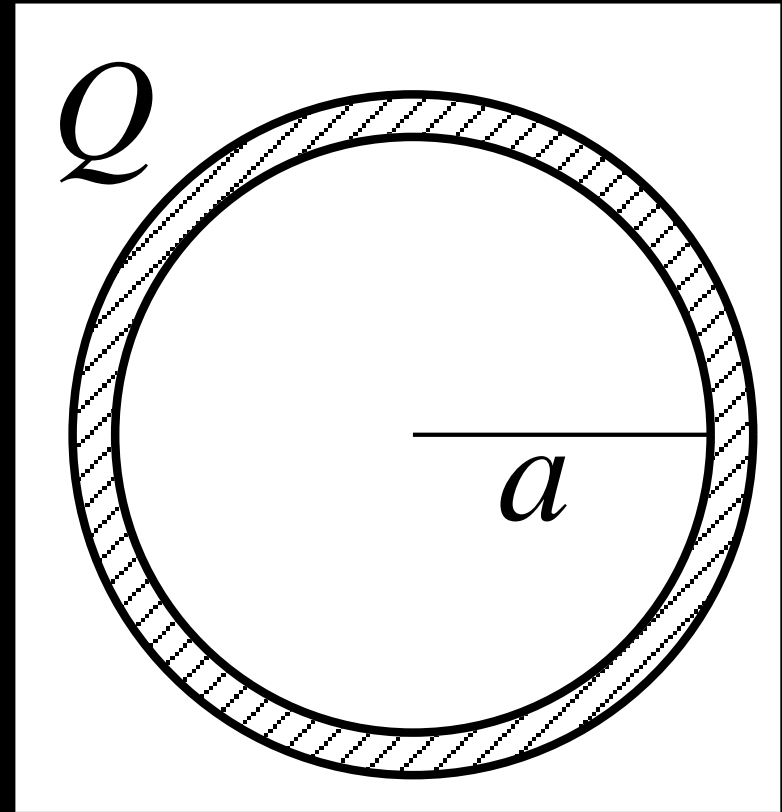
$$(28) \quad E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3}, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, & r > a \end{cases}$$



- 半径  $a$  のうすい球殻上に一様に分布した電荷の場合は,

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, & r > a \end{cases}$$

となる. (全電荷  $Q$ .)



● 例 2: 一様な直線状電荷分布 (cf. §§ 2. 3. 3 例 2)

電荷の線密度を  $\lambda$  とし, 直線電荷を中心とする半径  $r$ , 長さ  $L$  の円柱の表面  $S$  を考える.  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は中心軸に垂直で, 軸対称性より, 中心軸からの距離  $R$  のみの関数のはず. ガウスの法則より,

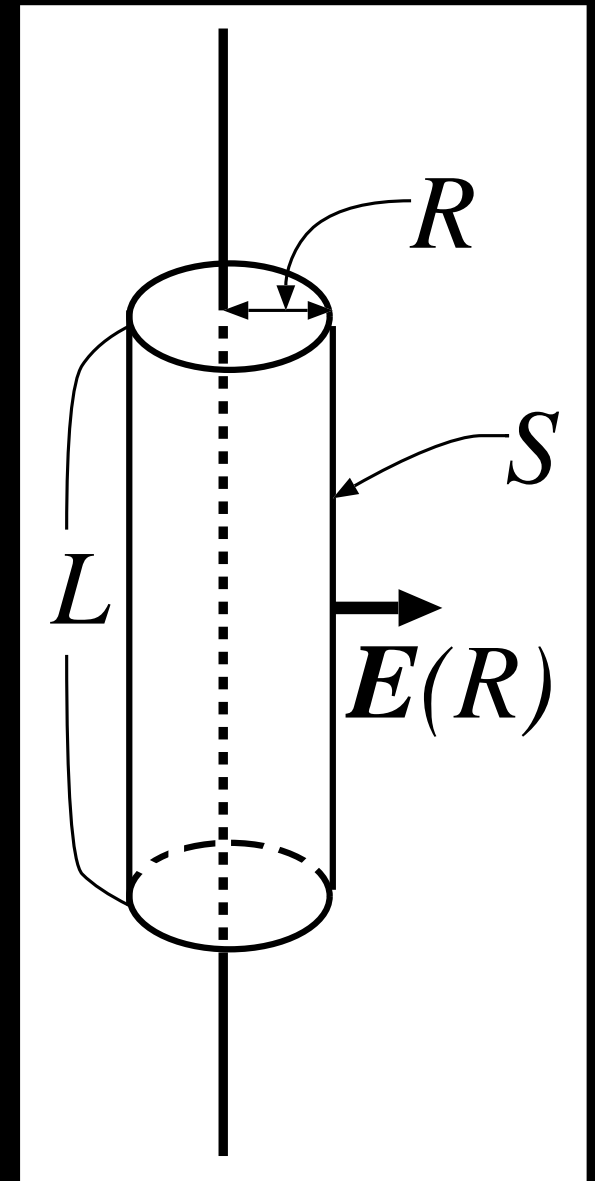
$$(29) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0},$$

$$\text{左辺} = E(R) \int_{S \text{ の側面}} dS = 2\pi R L E(R).$$

よって,

$$(30) \quad E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

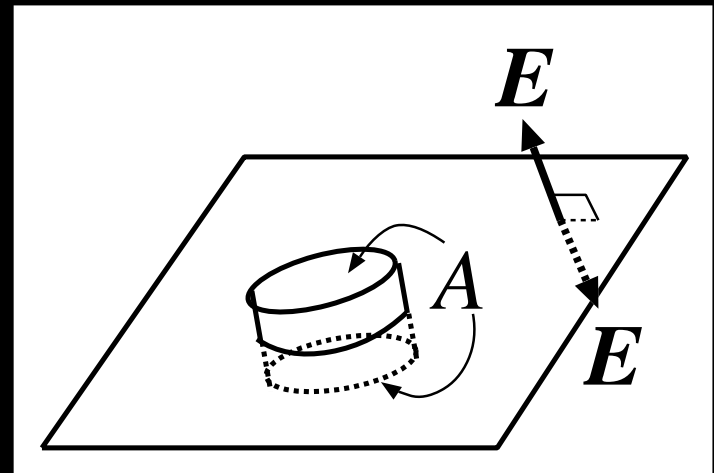
(§§ 2. 3. 3 例 2 と同じ結果).





- 例 3: 一様な平面状電荷分布

無限に広い一様な平面電荷分布 (電荷の面密度  $\sigma$ ) を考える. 電場は面に垂直で面の上下で反対向き. また, 面上の位置に依らない. 面を垂直に貫く円柱 (底面積  $A$ ) を考え, その表面  $S$  についてガウスの法則を用いると,



$$(31) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}.$$

側面は積分に寄与しないから, 底面での電場の大きさを  $E$  とすれば,

$$(32) \quad E A(\text{上面}) + E A(\text{下面}) = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}.$$

よって,

$$(33) \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

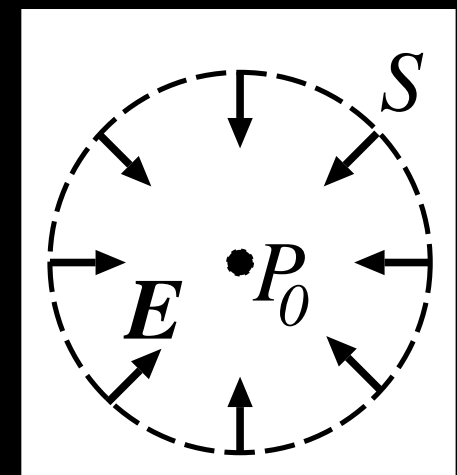
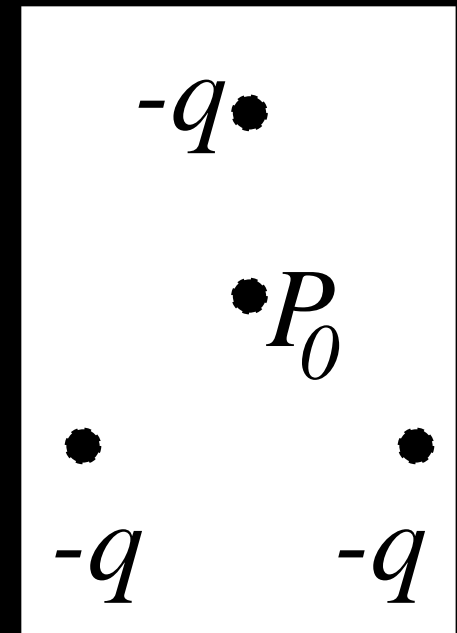
面からの距離にも依らない一様な場.

- 静電場内での釣り合い

静電場内でクーロン力が釣り合う点  $P_0$  を考える. このような点が安定かどうか, すなわち, この点に正の試験電荷 (test charge, 静電場を変えないような仮想的な点電荷) を置き, すこし位置をずらしたときに復元力が働くかどうか, を考える.  $P_0$  を囲む仮想的な小さな面  $S$  を考えると, もし  $P_0$  が安定な釣り合い点ならば,  $S$  上では常に  $P_0$  方向 (内向き) の電場  $\mathbf{E}$  があるはず. このとき,

$$(34) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} < 0.$$

つまり, ガウスの法則より  $S$  内には負の電荷がなければならない.  $S$  を無限小にとると,  $P_0$  に負の電荷がなければならない. 従って, 電荷のない場所では安定な釣り合い点はない.

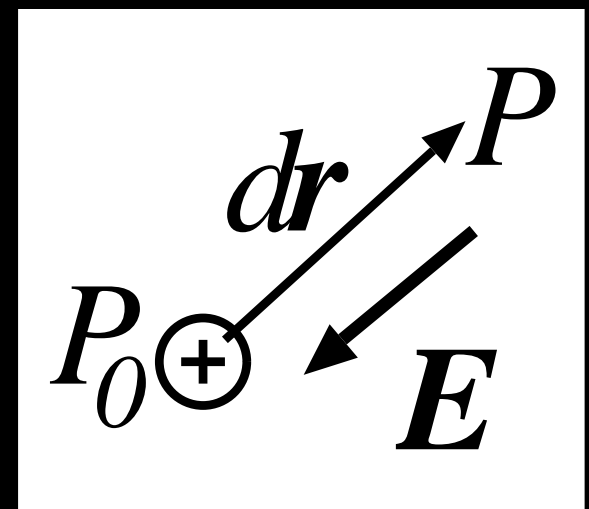
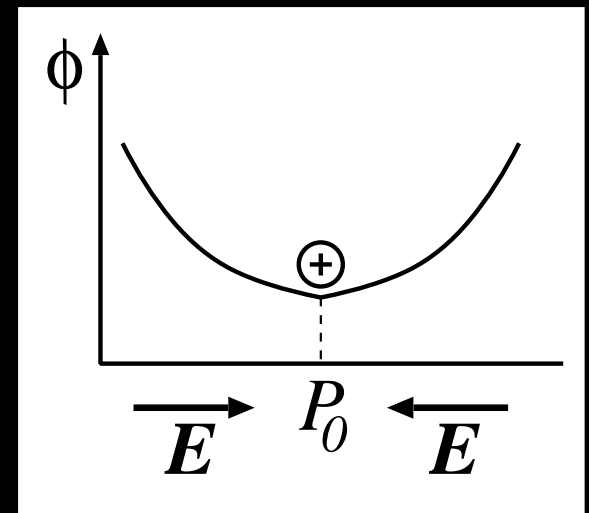


$\mathbf{E} = -\nabla\phi$ であったから，安定な釣り合いの点  $P_0$  では， $\mathbf{E} = -\nabla\phi = 0$  で， $\phi$  は極小値または極大値をとる．

あるいは， $\phi(P) = -\int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$  で，安定な釣り合いの点からどの方向に向かってこの積分をしても， $P_0$  の近傍では  $\phi$  は増えるだけか減るだけである．

$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} < 0 \Rightarrow \phi(P) > 0$  . ( $\phi(P_0) = 0$  とした．)

つまり，安定な釣り合いの点では極小値または極大値をとる．



電荷のない場所では安定な釣り合いの点がないということは，ポテンシャルの言葉でいうと，電荷のない領域ではポテンシャルは極小値も極大値もとらない，ということになる．

## 2.5.3 ガウスの法則 (微分形)

- ベクトル場の発散

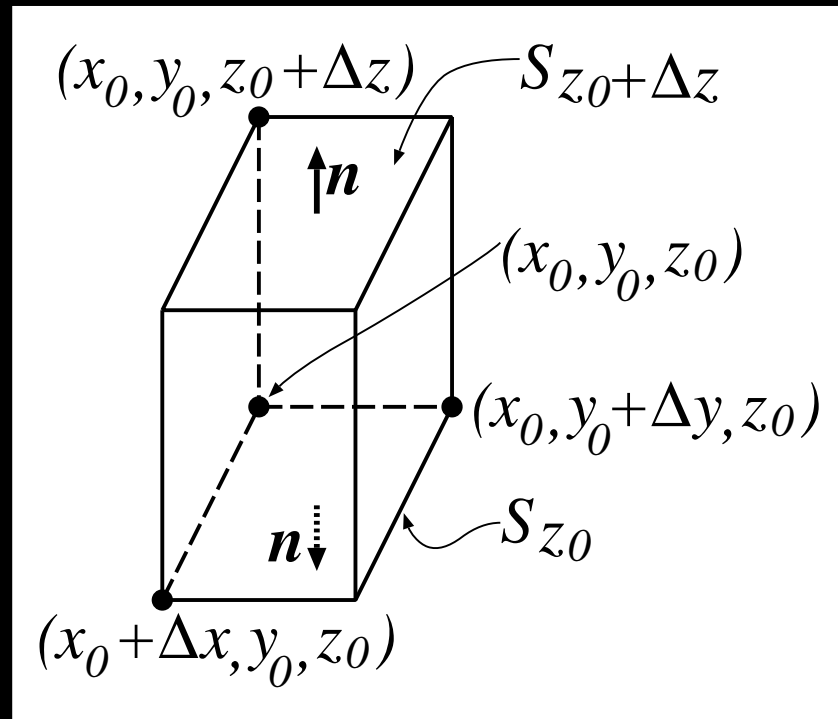
ベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  について

$$(35) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) (= \operatorname{div} \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{スカラー量})$$

を  $\mathbf{A}$  の発散 (divergence) という。

- ガウスの定理

- 図のような小さい直方体  $V_0$  を考える。この直方体の表面  $S_0$  を通るベクトル場  $\mathbf{A}$  の流束を考えよう。



まず,  $z$  軸に垂直な面  $S_{z_0}$  (下面) と  $S_{z_0+\Delta z}$  (上面) について考える.  
 $S_{z_0}$  を通る流束は (法線ベクトルの向きに注意して),

$$(36) \quad - \int_{S_{z_0}} A_z(x, y, z_0) dx dy .$$

$S_{z_0+\Delta z}$  を通る流束は

$$(37) \quad \int_{S_{z_0+\Delta z}} A_z(x, y, z_0 + \Delta z) dx dy .$$

これらの和は ( $\Delta V_0$  を小直方体の体積として),

$$(38) \quad \int \{A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0)\} dx dy$$

$$\simeq \int \frac{\partial A_z(x, y, z_0)}{\partial z} \Delta z dx dy \simeq \frac{\partial A_z(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V_0 .$$

$x$  軸,  $y$  軸に垂直な面についても同様. よって, 小直方体の表面から出る流束は,

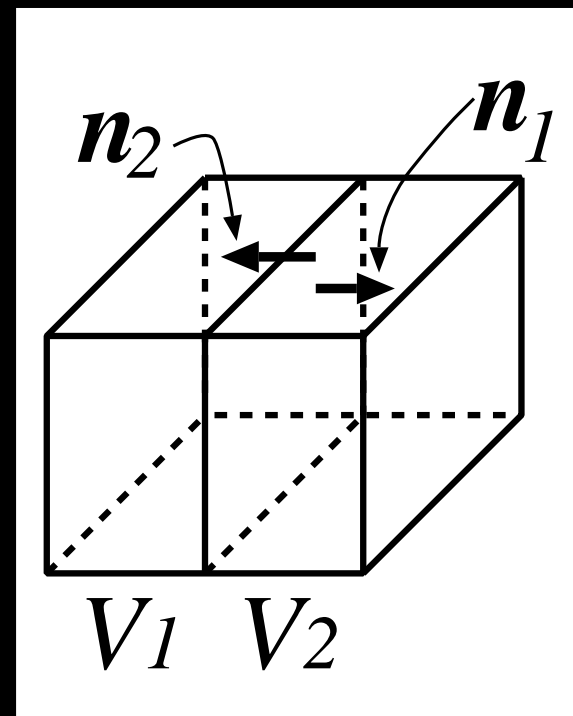
$$(39) \quad \int_{S_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \simeq \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V_0 \\ = (\nabla \cdot \mathbf{A})|_{\mathbf{r}=(x_0, y_0, z_0)} \Delta V_0 .$$

ある点での  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  はその点の近傍での単位体積あたりの外向きの流れ (わき出し) を表わす.

○ 流束の分割: 図のような 2 つの小直方体  $V_1, V_2$  を考える.  $V_{1(2)}$  の表面  $S_{1(2)}$  の流束は,

$$(40) \quad \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_1 ,$$

$$(41) \quad \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_2 .$$



$V_1$  と  $V_2$  を合わせたものを  $V_{1+2}$ , その表面を  $S_{1+2}$  とすると,  $V_1$  と  $V_2$  の境界面での面積分は打ち消し合うから ( $\mathbf{n}$  が逆向き),

$$(42) \quad \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{1+2}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

よって,

$$\int_{S_{1+2}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_1 + \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_2.$$

このことから, 一般の (小さくない) 領域  $V$  を小直方体に分割すると,  $V$  の表面を  $S$  として, ( $\Delta V_i$  は  $i$  番目の小直方体の体積)

$$(43) \quad \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta V_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (\text{体積積分})$$



○まとめると，ベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  について，領域  $V$  とその表面  $S$ (あるいは閉曲面  $S$  とそれに囲まれた領域  $V$ ) を考えると，

$$(44) \quad \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV$$

これをガウスの定理という。

- 微分形のガウスの法則
- 積分形のガウスの法則は

$$(45) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV .$$

これは，閉曲面  $S$  上の電場とその内部の電荷との関係を表わす．  
一般に電荷と面は離れていてもよいから (§§2.5.2 の例)，近接相互作用の考え方になっていない．

- ガウスの定理を用いると，

$$(46) \quad \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV .$$

従って，式 (45) は，

$$(47) \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV .$$

$V$  は任意の領域だから，これが成り立つためには，

$$(48) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \text{微分形のガウスの法則.}$$

点  $\mathbf{r}$  での電荷密度が同じ点  $\mathbf{r}$  での電場の“微分”を決定していると考えられるから，近接相互作用の考え方になっている。  
例えば， $E_x$  の変化だけを考えて ( $E_y, E_z = \text{const.}$ )，

$$(49) \quad \begin{aligned} E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z) &\simeq \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) \Delta x = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \Delta x. \end{aligned}$$

すなわち，

$$(50) \quad E_x(x + \Delta x, y, z) \simeq E_x(x, y, z) + \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \Delta x.$$

○ 例 1: §§2. 5. 2 の例 1 の電場が微分形の高ウスの法則を見たしていること.

$$(51) \quad \rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

$$(52) \quad \mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \mathbf{r}, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, & r > a, \quad Q = 4\pi a^3 \rho_0 / 3 \end{cases}$$

$r < a$  では,

$$(53) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$r > a$  では,

$$(54) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = 0$$

ただし,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

等を用いた.

- まとめ: 静電場の法則

$$(55) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} .$$

$$(56) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 .$$

式 (55) は  $\rho, \mathbf{E}$  が時間に依存しているときも正しい. (理由は第 5 章で. )

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}$$