

1.4 エネルギー保存則

- 閉曲面 S に囲まれた領域 V 内で点電荷が運動しているとする。
式 (1.3.15) は,

$$(1) \quad m_i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i(t) = \int_V dV q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)) [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] .$$

ただし, $\mathbf{v}_i(t) = d\mathbf{x}_i(t)/dt$. $\sum_i \mathbf{v}_i(t) \cdot (1)$ を考えると,

$$(2) \quad \begin{aligned} & \sum_i m_i \mathbf{v}_i(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i(t) \\ &= \sum_i \int_V dV q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)) \\ & \quad \times [\mathbf{v}_i(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}_i(t) \cdot \mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] . \end{aligned}$$

右辺第2項がゼロになることに注意して, 式 (1.3.18) を用いると,

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) \right) \\
 &= \sum_i \int_V dV q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)) \mathbf{v}_i(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\
 &= \int_V dV \left(\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad w(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \}.$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

(式 (1.3.19) を使った.)

式 (5) を式 (3) に代入して,

$$(6) \quad \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) \right) \\ = \int_V dV \left[-\frac{\partial w}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \right].$$

一方,

$$(7) \quad \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}.$$

(各自で確かめよ.) よって, 式(6)は,

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + \int_V dV w(\mathbf{r}, t) \right] = - \int_V dV \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

$W(t) \equiv \int_V dV w(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ と書くと,

$$(9) \quad -\frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + W(t) \right] = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$$

$$\quad \quad \quad (\text{ガウスの定理} \rightarrow) = \int_S \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}.$$

$$(10) \quad \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) = V \text{ 内の点電荷の運動エネルギー.}$$

$$(11) \quad W(t) = \int_V dV w(\mathbf{r}, t)$$

$$= \int_V dV \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \}$$

$$= V \text{ 内の } \underline{\text{電磁場のエネルギー}}$$

($w(\mathbf{r}, t)$ は電磁場のエネルギー密度 .)

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \text{電場のエネルギー密度,}$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \text{磁場のエネルギー密度.}$$

式 (9) は エネルギー保存則 を表している .

式 (9) の左辺は単位時間あたりの V 内の全エネルギーの減少量を表している . 式 (9) の右辺は V の表面 , すなわち S を通って単位時間に出ていくエネルギーを表す . (点電荷は V から出ていかないものとする .)

$$(12) \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

を , ポインティング (Poynting) ベクトル と呼ぶ . これは , 単位時間に単位面積を通して出ていくエネルギーの流れを表す .

$$(13) \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \text{ の次元 : } \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \frac{\text{A}^2}{\text{N}} \frac{\text{N}}{\text{Am}} \right] = \left[\frac{\text{J}}{\text{sm}^2} \right] .$$

注: $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ のとき, 必ずエネルギーの流れがあるとは限らない. $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ の面積分 $\int_S \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$ を見なければならない.

例: 静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と静磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ がある場合.

一般には,

$$(14) \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \neq 0.$$

しかし,

$$(15) \quad \begin{aligned} \int_S \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \\ &= \int_V (\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}) dV = 0 \end{aligned}$$

(定常的で, V 内に電流もないとすれば $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} = 0$.)
 V からエネルギーは出ていっていない.

- 十分遠方では電磁場が速やかにゼロになるような場合。
 V を十分大きくとると, $\int_S \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0$ となるから, 式 (9) は

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + W(t) \right] = 0$$

となる。これは,

$$(17) \quad \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(t) + W(t)$$

が保存量であることを表している。第1項は点電荷の運動エネルギーだから, 第2項が電磁場のエネルギーと考えれば, 式(16)はエネルギー保存則を表すことになる。

- 静電場のエネルギー

$$(18) \quad W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) dV .$$

$$(19) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot (\phi(\mathbf{r})\mathbf{D}(\mathbf{r})) &= (\nabla\phi(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \\ &= -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

を用いて ,

$$(20) \quad \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\phi(\mathbf{r})\mathbf{D}(\mathbf{r})) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{2} \int_S \phi(\mathbf{r})\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

電荷が有限の範囲に分布しているとする、遠方で ($|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$)

$$(21) \quad \phi(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{|\mathbf{r}|}, \quad |\mathbf{D}(\mathbf{r})| \sim \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}$$

となる。表面積は $\sim |\mathbf{r}|^2$ 程度だから、 V を十分大きくとれば式 (20) の右辺第 2 項の表面積分はゼロになる。よって、

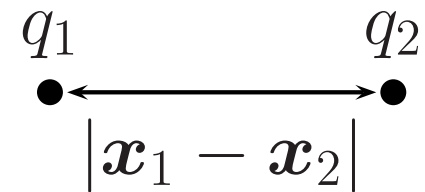
$$(22) \quad W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV, \quad \underline{\text{静電場のエネルギー}}.$$

○ 例題 1: 座標 \mathbf{x}_i にある点電荷 q_i . ($i = 1, \dots, N$)

$$(23) \quad \rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i), \quad \phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_i|}.$$

$$\begin{aligned}
 (24) \quad W &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_j|} dV \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} .
 \end{aligned}$$

$N = 2$ の場合 ,



$$(25) \quad W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} + \frac{q_2 q_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} .$$

(各項の意味 , $1/2$ がついている理由を考えよ .)

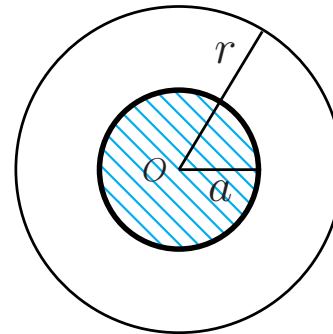
確かに2つの点電荷の間のポテンシャルエネルギーになっている .

この系のエネルギーは無限に離れた q_1, q_2 を距離 $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ まで近づけるのに必要な仕事 .

$$\begin{aligned}
 (26) \quad W &= - \int_{\infty}^{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(x) dx = - \int_{\infty}^{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{x^2} dx \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \quad (\text{式 (25) と一致})
 \end{aligned}$$

○ 例題 2: 一様に帯電した半径 a の球 (中心を原点とする.)

$$(27) \quad \rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$



系の対称性から $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r =$ 動径方向の単位ベクトル. ガウスの法則から (式 (1. 1. 15, 16) 参照), 半径 r の球面を考えて,

$$(28) \quad \int_{\text{球面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{球}} \rho(r') dV'.$$

$$(29) \quad \text{左辺} = E(r) \int dS = 4\pi r^2 E(r).$$

$$(30) \quad \text{右辺} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \begin{cases} Q/\varepsilon_0, & r > a, \\ Q(r)/\varepsilon_0, & r < a. \end{cases}$$

ただし, $Q \equiv \int_0^a \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi a^3 \rho_0/3$ (全電荷),
 $Q(r) \equiv (r/a)^3 Q$ (半径 $r (< a)$ 内の電荷).
よって,

$$(31) \quad E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > a, \\ \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r < a. \end{cases}$$

(図に書いてみよ.)

エネルギーは ,

$$\begin{aligned}(32) \quad W &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^\infty E^2(r) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \left[\int_0^a \left(\frac{r}{a} \right)^6 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \right] \\ &= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} .\end{aligned}$$

全電荷 Q を一定に保って $a \rightarrow 0$ とすると (点電荷の極限) ,
 $W \rightarrow \infty$ となる . (cf. 例題 1)