

## 2.2 誘電体中のガウスの法則

- 静電場について，

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

この式は (微視的な意味で) 常に正しい．ただし， $\rho(\mathbf{r})$  は全ての電荷密度．誘電体中では，

$$(2) \quad \rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r}).$$

ここで， $\rho_f(\mathbf{r})$  は 自由電荷密度 で，(手で与えた電荷を含め) 原子・分子に束縛されていない自由な電荷の密度である．

真空中では， $\rho = \rho_f$  であった．

一方，誘電体中では電場  $E$  により分極  $P$  が生じ，分極電荷密度  $\rho_p$  が現われる．どのような  $P$ ， $\rho_p$  が生じるかは誘電体の種類による．常に  $\rho_p$  を考慮しながら誘電体を取り扱うのは不便．

## ● 電束密度 $D$

式 (2. 1. 8) を用いて

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \{ \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r}) \} = \frac{1}{\varepsilon_0} \{ \rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \},$$

$$(4) \quad \nabla \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})] = \rho_f(\mathbf{r}).$$

ここで電束密度

$$(5) \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad \text{cf. 式 (1. 1. 5)}$$

を導入すれば,

$$(6) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r})} \quad \underline{\text{誘電体中のガウスの法則}}$$

を得る . ( $\rho_p$  は忘れて  $\rho_f$  だけ考えればよい .)

- 一様で等方的な誘電体では，弱い電場に対して，

(7)  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$ ，  $\chi_e$  : 電気感受率(比例定数) .

このとき，

(8)  $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = (\epsilon_0 + \chi_e) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$  .

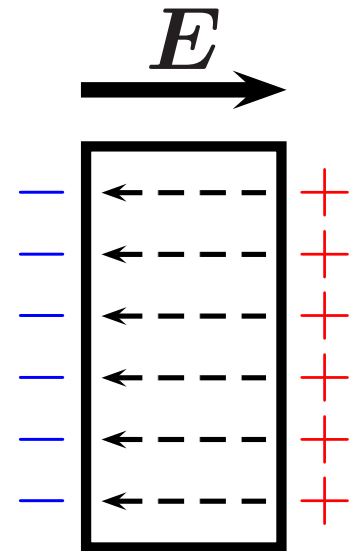
(9)  $\epsilon (\equiv \epsilon_0 + \chi_e)$  : 誘電率 .

電気感受率  $\chi_e$  ， 誘電率  $\epsilon$  は物質 (誘電体) の性質を表す定数.

通常，分極ベクトル  $\mathbf{P}$  は  $\mathbf{E}$  と同じ方向を向くから，  $\chi_e > 0$  . (式 (1. 8. 32) 参照 .)

従って，  $\epsilon > \epsilon_0$  .

⇒ (同じ  $\rho_f$  に対して) 電場は弱まる .



- 静電場に対するもう一つの式:  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$  .

これは誘電体中でも成り立つ . なせなら , 微視的に  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  が成り立っていれば , これを平均化しても  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  .

このことから誘電体中でも静電場について ,

$$(10) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) .$$

式 (6) , (8) を用いて ,

$$(11) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \text{誘電体中のポアソン方程式 .}$$

(真空中のもので ,  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$  ,  $\rho \rightarrow \rho_f$  としただけ .)

- 時間に依存する場合 .  
分極ベクトルも時間と共に変化 .

$$(12) \quad \rho_p(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) .$$

$$(13) \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) .$$

$$(14) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_f(\mathbf{r}, t) .$$

通常の一様で等方的な誘電体については , 弱い  $E$  について ,

$$(15) \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) . \quad (\varepsilon : \text{定数})$$

(電磁波のように振動している場合は , 一般に  $\varepsilon$  は振動数の関数になる .)