

1.6 電磁ポテンシャル

$$(1) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

と置くと, $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ は自動的に満たされる。(各自確かめよ.) $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を ベクトルポテンシャル と呼ぶ。(単位: Wb/m.)
逆に $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ なら $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ と書ける。例えば,
(具体的に積分して)

$$(2) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{y}} \int_{x_0}^x B_z(x', y, z, t) dx' \\ + \hat{\mathbf{z}} \left[\int_{y_0}^y B_x(x_0, y', z, t) dy' - \int_{x_0}^x B_y(x', y, z, t) dx' \right]$$

と書くことができる。($\hat{\mathbf{z}}$ は z 軸方向の単位ベクトル。 $\hat{\mathbf{y}}$ も同様。)

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

を用いると,

$$(4) \quad \nabla \times \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = 0.$$

式 (1. 1. 28), 式 (1. 1. 29) に関する議論と同様にして,

$$(5) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t)$$

と書ける. $\phi(\mathbf{r}, t)$ は スカラーポテンシャル で単位は V .
まとめると,

$$(6) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$(7) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

ϕ, \mathbf{A} を電磁ポテンシャルという.

- 電磁ポテンシャルを決定する方程式 (定常的な場合)

$$(8) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}),$$

$$(9) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \text{ より ,}$$

$$(10) \quad -\nabla \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

$$(11) \quad \Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \quad \text{ラプラシアン (Laplacian)}$$

を導入すれば ,

$$(12) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

$$\text{一方 , } \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(\mathbf{r}) \text{ より ,}$$

$$(13) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}).$$

$$(14) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

を用いて，(各自で確かめよ)

$$(15) \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}).$$

ここで次のような変換 (ゲージ変換) を考える .

$$(16) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla u(\mathbf{r})$$

($u(\mathbf{r})$ は微分可能な任意のスカラー関数 .) このとき，

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{B}'(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) \\ &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \times \nabla u(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

すなわち， \mathbf{B} を与えても \mathbf{A} は一意的には決まらず，上の変換の自由度が残る .

今，式 (15) の 1 つの解を $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ とする .

$$(18) \quad \Delta\chi(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0$$

であるような $\chi(\mathbf{r})$ を用いて, 式 (16) の変換を行なう.

$$(19) \quad \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}).$$

すると,

$$(20) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_c = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla \cdot \nabla\chi = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \Delta\chi = 0.$$

\mathbf{A}_c も式 (15) を満すから, 式 (15) は,

$$(21) \quad \Delta\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = -\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r}), \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_c = 0.$$

以下, \mathbf{A}_c の添字 c を省く.

まとめると，

$$(22) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0},$$

$$(23) \quad \Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r}), \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

$\phi(\mathbf{r})$ と $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の (デカルト座標での) 各成分は，同じ形の方程式，ポアッソン (Poisson) 方程式 を満す．