

第1章 真空中の電磁場

1.1 真空中のマクスウェルの方程式

- マクスウェル (Maxwell) の方程式

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t),$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t),$$

$$(4) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0.$$

ただし,

$$(5) \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

(6) $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854 \dots \times 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2}$: 真空の誘電率.

(7) $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$: 真空の透磁率.

(8) $c \equiv 2.99792458 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$: 真空中の光速 (1m の定義).

(9) 電荷密度 ρ の単位 : $\frac{\text{C}}{\text{m}^3}$ ($\text{C} = \text{As}$)

(10) 電流密度 i の単位 : $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

(11) 電場 E の単位 : $\frac{\text{V}}{\text{m}}$ $\left(\text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{Nm}}{\text{As}} \right)$,

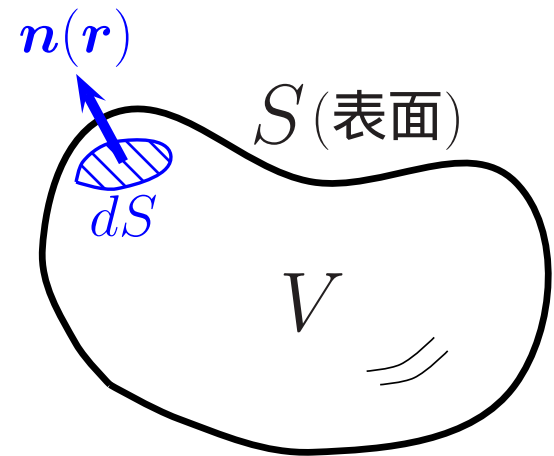
(12) 磁束密度 B の単位 : $\text{T} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$ $\left(\text{Wb} = \frac{\text{Nm}}{\text{A}} = \text{Vs} \right)$.

- 式 (1): ガウス (Gauss) の法則

(13) 次元 : $\nabla \cdot \mathbf{D} \rightarrow \left[\frac{1}{\text{m}} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2} \frac{\text{V}}{\text{m}} \right] = \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right] = \rho \text{ の次元} .$

- 静電場の場合:

(14) $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} .$



領域 V を考えて , V の表面を S とする .

(15) $\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV .$

右辺の積分は V 内の電荷の総量 . ガウスの定理を用いると ,

(16) $\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} .$

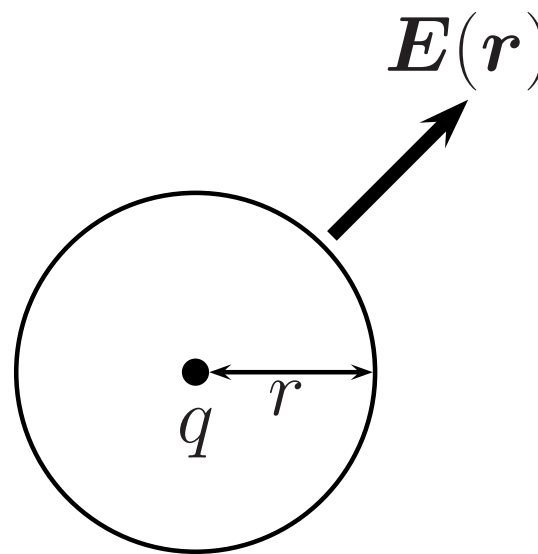
原点に点電荷 q があるとするとき、対称性から $E(\mathbf{r})$ は動径方向を向き、 $r = |\mathbf{r}|$ だけの関数になる。 V を半径 r の球とすれば、

$$(17) \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S E(r) dS = E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

よって、クーロン (Coulomb) の法則

$$(18) \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

を得る。



● 式 (2): 磁場に対するガウスの法則

右辺=0 → 磁荷 (磁気単極子) が存在しないことを表す。

- 式 (3): アンペール (Ampère)-マクスウェルの法則次元:

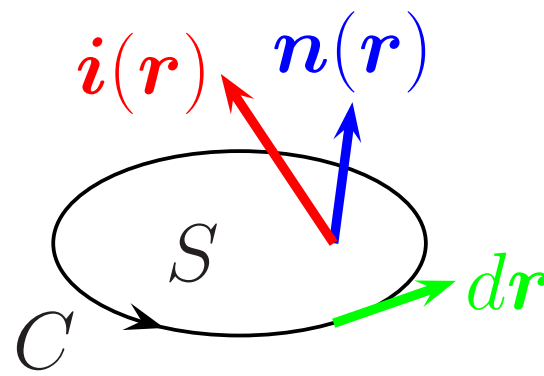
$$(19) \quad \nabla \times \mathbf{H} \rightarrow \left[\frac{1}{\text{m}} \frac{\text{A}^2}{\text{N}} \frac{\text{N}}{\text{Am}} \right] = \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right] = i \text{の次元},$$

$$(20) \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow \left[\frac{1}{\text{s}} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2} \frac{\text{N}}{\text{As}} \right] = \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right] = i \text{の次元}.$$

- 定常的な場合 .

$$(21) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}).$$

閉曲線 C に囲まれた曲面 S を考えると,



$$(22) \quad \int_S \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

右辺の積分は面 S を通る電流 I . ストークス (Stokes) の定理を用いると, 左辺は,

$$(23) \quad \int_S \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

すなわち,

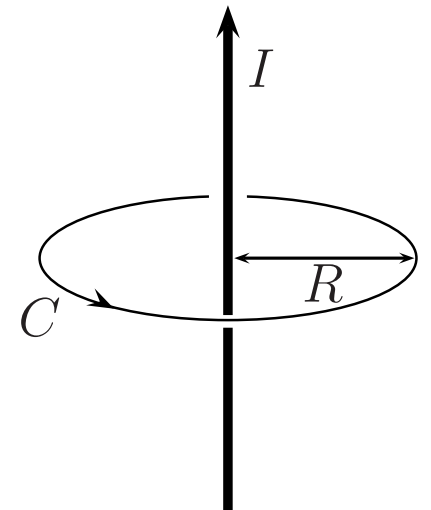
$$(24) \quad \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I. \quad (\text{アンペールの法則})$$

無限に長い直線電流を考えると, $|\mathbf{B}(\mathbf{r})|$ は電流からの距離 R だけの関数となり, \mathbf{B} の向きは直線電流を中心軸とする円の円周方向 (右ねじの方向) となる. 従って, C として直線電流を中心軸とする半径 R の円を考えれば,

$$(25) \quad \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = B(R) \oint_C dr = 2\pi R B(R).$$

よって,

$$(26) \quad B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$



- 定常的でない場合 .

$$(27) \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} : \quad \text{変位電流の存在 .}$$

その意味は後で .

- 式 (4): ファラデー (Faraday) の電磁誘導の法則

- 定常的な場合 .

$$(28) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 .$$

$$(29) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}), \quad \phi(\mathbf{r}) : \text{静電ポテンシャル (電位).}$$

と書ける . ($\phi(\mathbf{r})$ はスカラー量で , 単位は V .)

実際 , 式 (29) → 式 (28) :

$$(30) \quad (\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = - \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi = 0 .$$

他の成分も同様 .

逆に，式 (28) → 式 (29)：

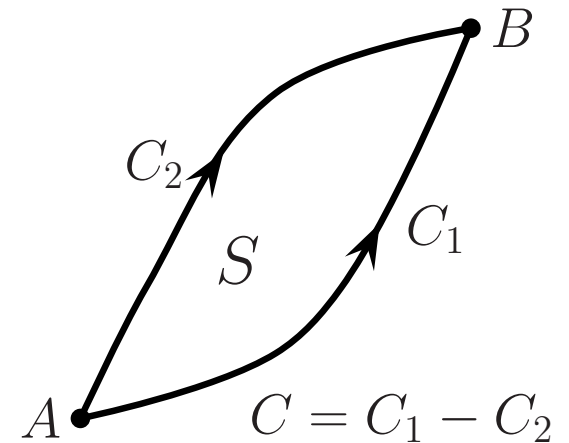
2点 A, B を考え， A から B に到る 2つの曲線 C_1, C_2 を考える．
このとき， $C = C_1 - C_2$ は閉曲線となる． C に囲まれた面を S と
すると，

$$(31) \quad 0 = \int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} .$$

すなわち，

$$(32) \quad \int_{C_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

となり， $\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ は経路に依らない．
(両端の点のみに依る．)



$$(33) \quad \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = -\phi(B) + \phi(A)$$

点 A の座標を r , 点 B の座標を $r + dr$ とすると ,

$$(34) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -d\phi(\mathbf{r}).$$

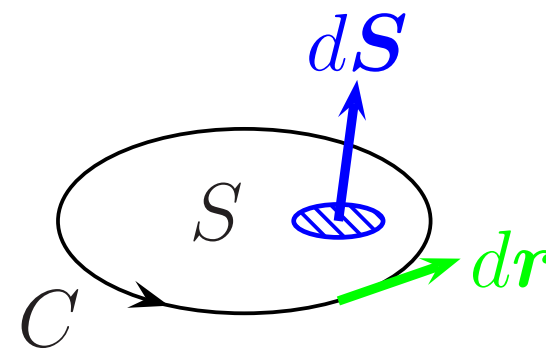
成分で書くと ,

$$(35) \quad E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\frac{\partial\phi}{\partial x} dx - \frac{\partial\phi}{\partial y} dy - \frac{\partial\phi}{\partial z} dz .$$

よって , 式 (29) を得る .

○ 定常的でない場合 .

固定された (時間に依らない) 閉曲線 C で囲まれた面 S を考える .



$$(36) \quad \int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0 .$$

ストークスの定理を用いて ,

$$(37) \quad \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

第1項は回路 C に生じる起電力 ϕ_{em} . 第2項の積分は, S を貫く磁束 Φ . 従って, ファラデーの電磁誘導の法則

$$(38) \quad \phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

を得る . (注 : 回路が運動している場合にもこの式は成り立つ .)

● ローレンツ (Lorentz) 力 : 電磁場中の点電荷 q に働く力 .

$$(39) \quad \mathbf{F} = q [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] , \quad \mathbf{r} = \text{電荷の座標} , \quad t = \text{時間} .$$

電荷の速度 \mathbf{v} に比例する部分は仕事をしないことに注意 .