

### 3.3 ベクトルポテンシャルの多重極展開

静電ポテンシャルの多重極展開 (§ 1. 8) と同様に考える .

- 原点  $O$  を中心とする半径  $a$  の球内に定常的な電流分布があると  
する .

$$(1) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' .$$

$r = |\mathbf{r}|$  ,  $r' = |\mathbf{r}'|$  ,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \theta'$  ,  $r' < a < r$  とすると ,

$$(2) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta')$$

と書けるから ,

$$(3) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{A}_{\ell}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell}} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') r'^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta') dV' .$$

○  $l = 0$  の項

$$(4) \quad \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') dV' .$$

(cf. 式 (1. 8. 7))  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  として ,

$$(5) \quad \nabla_{r'} \cdot (x' \mathbf{i}(\mathbf{r}')) = (\nabla_{r'} x') \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') + x' \nabla_{r'} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') = i_x(\mathbf{r}')$$

よって ,

$$(6) \quad \int i_x(\mathbf{r}') dV' = \int \nabla_{r'} \cdot (x' \mathbf{i}(\mathbf{r}')) dV' = \int_S x' \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S} = 0 .$$

( $S$  を十分大きくとる .)  $y, z$  成分も同様で ,

$$(7) \quad \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') dV' = 0 . \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0 .$$

(磁荷がないことに対応 .)

○  $\ell = 1$  の項

$$(8) \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') r' \cos \theta' dV' = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) dV'.$$

公式  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$  を用いると,

$$(9) \quad (\mathbf{r}' \times \mathbf{i}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{r} = \mathbf{i}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}'(\mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}).$$

よって,

$$(10) \quad \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) dV' \\ = \left[ \int \mathbf{r}' \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') dV' \right] \times \mathbf{r} + \int \mathbf{r}' (\mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}) dV'.$$

また,

$$\begin{aligned}
(11) \quad & \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot (x'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{i}(\mathbf{r}')) \\
&= (\nabla_{\mathbf{r}'} x') \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) + x' (\nabla_{\mathbf{r}'} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') \\
&\quad + x'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') \\
&= i_x(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) + x' \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}
\end{aligned}$$

ゆえ ,

$$\begin{aligned}
(12) \quad & \int i_x(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) dV' + \int x' \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r} dV' \\
&= \int \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot (x'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{i}(\mathbf{r}')) dV' = \int x' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}' = 0 .
\end{aligned}$$

すなわち ,

$$(13) \quad \int \mathbf{i}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) dV' + \int \mathbf{r}' (\mathbf{i}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}) dV' = 0 .$$

式 (10) , (13) より ,

$$(14) \quad \int \mathbf{i}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) dV' = \frac{1}{2} \left[ \int \mathbf{r}' \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') dV' \right] \times \mathbf{r} .$$

よって ,

$$(15) \quad \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} .$$

ここで ,

$$(16) \quad \mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV . \quad \underline{\text{磁気双極子モーメント}}$$

(cf.  $\phi_1(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ ,  $\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV$ )

$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0$  だから , 遠方では  $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$  が最も重要になる .

● 平面回路  $C$  を流れる電流  $I$  の磁気双極子モーメント  
細い導線の断面  $S$  について積分できて ,

$$(17) \quad \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV = I d\mathbf{r} .$$

よって ,

$$(18) \quad \mathbf{m} = \frac{I}{2} \int_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} .$$

$|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|/2$  は微小三角形の面積 .  $C$  の囲む面の法線方向 (右ねじの進む方向を正にとる) の単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  と書けば ,

$$(19) \quad \mathbf{m} = IS\mathbf{n}, \quad S : C \text{ に囲まれる平面の面積} .$$

$\mathbf{m}$  の単位は  $\text{Am}^2$  .

○  $\mathbf{m}$  は原点の取り方に依らない . (本当のベクトル .)

$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$  と原点をずらすと ( $\mathbf{a}$ :定数ベクトル)

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' + \mathbf{a}) \times \mathbf{i}(\mathbf{r}' + \mathbf{a}) dV' \\ &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \bar{\mathbf{i}}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{2} \mathbf{a} \times \int \bar{\mathbf{i}}(\mathbf{r}') dV' . \end{aligned}$$

ここで ,  $\bar{\mathbf{i}}(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{i}(\mathbf{r}' + \mathbf{a})$  は新しい座標で見た電流分布 .

式 (7) を用いると第 2 項の積分はゼロになり ,

$$(21) \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \bar{\mathbf{i}}(\mathbf{r}') dV' \equiv \bar{\mathbf{m}} .$$

$\bar{\mathbf{m}}$  は新しい座標での磁気モーメント .

● 磁気双極子の作る磁場

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  に

$$(22) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} .$$

を代入して ,

$$(23) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \left( \nabla \frac{1}{r^3} \right) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right] . \end{aligned}$$

$\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$  ,  $\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{m}$  を用いて ,

$$(24) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-3\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + 2r^2\mathbf{m}}{r^5}.$$

公式  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  から ,  
 $\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = r^2\mathbf{m} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r}$  . よって ,

$$(25) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}. \quad (r \neq 0)$$

- 静磁場中の磁気双極子モーメント  $\mathbf{m}$  に働く力

$$(26) \quad \mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV.$$

$\mathbf{i}(\mathbf{r})$  は原点付近に分布しているとし , 外部磁場  $\mathbf{B}_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$  は原点付近でゆっくり変化するものとして , テーラー展開する .

$$(27) \quad \mathbf{B}_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B}_{\text{ext.}}(0) + \dots .$$



§ 3.2 より ,

$$(28) \quad \mathbf{F} = \int \mathbf{i}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) dV \\ = \left( \int \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV \right) \times \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0) + \int \mathbf{i}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0) dV .$$

第 1 項はゼロ . 第 2 項を成分で考えると , ( $\mathbf{B}_{\text{ext.}}$  の  $\text{ext.}$  は省略)

$$(29) \quad F_x = \int i_y(\mathbf{r})(\mathbf{r} dV \cdot \nabla) B_z(0) - \int i_z(\mathbf{r})(\mathbf{r} dV \cdot \nabla) B_y(0)$$

$\nabla \cdot (xy\mathbf{i}) = i_x y + i_y x$  を用いると , (ガウスの定理も用いて)

$$(30) \quad \int i_y x dV = \int (i_y x + i_x y - i_x y) dV \\ = \int [\nabla \cdot (xy\mathbf{i}) - i_x y] dV = - \int i_x y dV .$$

他の成分も同様．また， $\int i_x x dV = 0$ なども分かる．

$$\begin{aligned}
 (31) F_x &= \int i_y \left( x dV \frac{\partial}{\partial x} + y dV \frac{\partial}{\partial y} + z dV \frac{\partial}{\partial z} \right) B_z(0) \\
 &\quad - \int i_z \left( x dV \frac{\partial}{\partial x} + y dV \frac{\partial}{\partial y} + z dV \frac{\partial}{\partial z} \right) B_y(0) \\
 &= \frac{1}{2} \int \left[ (i_y x - i_x y) dV \frac{\partial}{\partial x} + (i_y z - i_z y) dV \frac{\partial}{\partial z} \right] B_z(0) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int \left[ (i_z x - i_x z) dV \frac{\partial}{\partial x} + (i_z y - i_y z) dV \frac{\partial}{\partial y} \right] B_y(0) \\
 &= \frac{1}{2} \int \left[ (\mathbf{r} \times \mathbf{i})_z dV \frac{\partial}{\partial x} - (\mathbf{r} \times \mathbf{i})_x dV \frac{\partial}{\partial z} \right] B_z(0) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int \left[ -(\mathbf{r} \times \mathbf{i})_y dV \frac{\partial}{\partial x} + (\mathbf{r} \times \mathbf{i})_x dV \frac{\partial}{\partial y} \right] B_y(0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(32) \quad F_x &= \frac{1}{2} \int [(\mathbf{r} \times \mathbf{i})dV \times \nabla]_y B_z(0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int [(\mathbf{r} \times \mathbf{i})dV \times \nabla]_z B_y(0) \\
&= \left[ \frac{1}{2} \int [(\mathbf{r} \times \mathbf{i})dV \times \nabla] \times \mathbf{B}(0) \right]_x \\
&= [(\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0)]_x .
\end{aligned}$$

他の成分も同様に、

$$(33) \quad \mathbf{F} = (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0) .$$

さらに、 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$  を用いると、

$$(34) \quad \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0)) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0)) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0)) .$$

- $B_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$  中の  $m$  のエネルギーを  $W(\mathbf{r})$  とすれば,  $F = -\nabla W(0)$  であるから,

$$(35) \quad W(0) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext.}}(0). \quad (\text{cf. } \S 1.8)$$

$m$  が原点ではなく,  $r$  にあれば,

$$(36) \quad W(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$$

となる.

- 2つの磁気双極子間の相互作用エネルギー  
原点に  $m_1$ ,  $r$  に  $m_2$  があるとする.  $m_1$  が作る磁場は,

$$(37) \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}_1}{r^5}.$$

従って, エネルギーは,

$$\begin{aligned}
 (38) \quad W(\mathbf{r}) &= -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r^5}.
 \end{aligned}$$

○  $\mathbf{m}_1 \parallel \mathbf{r}$  ,  $\mathbf{m}_2 \parallel \mathbf{r}$  のとき ,

$$(39) \quad W(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m_1 m_2 r^2 - r^2 m_1 m_2}{r^5} = -2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^3}.$$

$F = -dW/dr < 0$  ゆえ , 引力.

○  $\mathbf{m}_1 \parallel \mathbf{r}$  ,  $-\mathbf{m}_2 \parallel \mathbf{r}$  のとき ,

$$(40) \quad W(r) = +2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^3}.$$

$F = -dW/dr > 0$  ゆえ , 斥力.

○  $m_1 \perp r$  ,  $m_2 \perp r$  ,  $m_1 \parallel m_2$  のとき ,

$$(41) \quad W(r) = + \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3} .$$

$F = -dW/dr > 0$  ゆえ , 斥力.

○  $m_1 \perp r$  ,  $m_2 \perp r$  ,  $m_1 \parallel -m_2$  のとき ,

$$(42) \quad W(r) = - \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3} .$$

$F = -dW/dr < 0$  ゆえ , 引力.