

第3章 物質中の磁場

3.1 定常電流の作る磁場 (復習)

- 電荷保存則 (§ 1. 2)

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0.$$

定常状態では,

$$(2) \quad \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}) = 0$$

となる.

- ベクトルポテンシャルのポアソン方程式 (§ 1. 6)

$$(3) \quad \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}), \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

$$(\iff \Delta \phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0)$$

静電場のとき (§ 1. 7) と同様にして, 一般解は,

$$(4) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

と書ける.

- $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ を確かめる .

$$\begin{aligned} (5) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla_{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\nabla_{r'} \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{r'} \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}') \right] dV' \\ &\quad (\text{第 2 項は } \nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \text{ で消える}) \\ &\quad (\text{第 1 項にガウスの定理を適用すると}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}' = 0 \end{aligned}$$

(電荷分布を有限範囲として , 遠方で $\mathbf{i}(\mathbf{r}') = 0$ を用いた .)

● ビオ-サバル (Biot-Savart) の法則

$B(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ より ,

$$(6) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' .$$

成分で考えると ,

$$(7) \quad \begin{aligned} \left(\nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)_x &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{i_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{i_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -i_z(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + i_y(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \left(\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)_x . \end{aligned}$$

また ,

$$(8) \quad \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} .$$

よって，定常電流の作る磁束密度は，

$$(9) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

○ 細い導線を通る電流 I の場合，断面 S の積分が実行できて，

$$(10) \quad \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}') dV' = I d\mathbf{r}'$$

と書けるから，

$$(11) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

(積分は導線にそって行なう.)

- 定常電流による磁場のエネルギー
§ 1.4 より,

$$(12) \quad W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dV$$

$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}$
(cf. 式 (1.4.7)) を用いて,

$$(13) \quad W = \frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} dV .$$

第 1 項はガウスの定理からゼロ . 結局 ,

$$(14) \quad W = \frac{1}{2} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}) dV .$$

(cf. 式 (1.4.22))