

2.5 誘電体の境界条件

- 2種類の誘電体，誘電体 1 と誘電体 2，の境界面を考える．それぞれの誘電率を ε_1 ， ε_2 とし，境界面に電荷はないものとする．
 - 境界面を囲む微小なうすい円筒 (底面積 ΔS) を考えて，ガウスの法則を適用すると，

$$(1) \quad \int \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

厚さがゼロの極限で，(側面からの寄与は無視できる)

$$(2) \quad \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S = 0.$$

ここで， \mathbf{D}_i は誘電体 i 中の電束密度， \mathbf{n}_i は境界面の誘電体 i 方向の単位法線ベクトル．

$$(3) \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 (\equiv \mathbf{n})$$

ゆえ，

$$(4) \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

従って、 D の法線成分は連続 となる。 E については、

$$(5) \quad (\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = 0$$

ゆえ、 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ なら、 E の法線成分は不連続 となる。

○ 境界面にまたがる微小な長方形 S とその周 C を考える。

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ から、

$$(6) \quad 0 = \int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

境界面に垂直な辺の長さをゼロにする極限を考えると、

$$(7) \quad \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \Delta r + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2 \Delta r = 0.$$

ただし、 \mathbf{E}_i は誘電体 i 中の電場、 \mathbf{t}_i は誘電体 i での長方形 S の境界面に平行な辺の方向の単位ベクトル (境界面の接ベクトル)、 Δr は境界面に平行な辺の長さ。

$$(8) \quad t_1 = -t_2 (\equiv t)$$

ゆえ ,

$$(9) \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{t} = 0 .$$

すなわち , \mathbf{E} の接線成分は連続 . また ,

$$(10) \quad \left(\frac{\mathbf{D}_1}{\varepsilon_1} - \frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_2} \right) \cdot \mathbf{t} = 0$$

より , \mathbf{D} の接線成分は不連続 .

● ポテンシャルについては , 境界面で D あるいは E の法線成分が有限である限り ,

$$(11) \quad \phi_1 = \phi_2 .$$

- D あるいは E の屈折の法則

境界面の誘電体 1 方向の法線ベクトルと $D_{1(2)}$ がなす角を $\theta_{1(2)}$ とする． D の法線成分が連続ゆえ，

$$(12) \quad |D_1| \cos \theta_1 = |D_2| \cos \theta_2 .$$

E の接線成分の連続性より，

$$(13) \quad \frac{|D_1|}{\varepsilon_1} \sin \theta_1 = \frac{|D_2|}{\varepsilon_2} \sin \theta_2 .$$

よって，

$$(14) \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} .$$

$$(15) \quad \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} .$$

● 例題 1: 2 種類の誘電体を含む平行板コンデンサー

極板の面積を A , 極板間の距離を d とする . 誘電体 1(誘電率 ε_1) の層 , 誘電体 2(誘電率 ε_2) の層 , 再び誘電体 1 の層と 3 つの極板に平行な誘電体の層で極板間を満たす . 誘電体 2 の層の厚さを r とする . 各極板に $\pm Q$ の電荷を与えると電場は極板に垂直で各誘電体層で一定 . 各層の電場 (電束密度) の大きさを $E_1 , E_2 , E_3 (D_1 , D_2 , D_3)$ とすると , D の法線成分は連続ゆえ ,

$$(16) \quad D_1 = D_2 = D_3 = \frac{Q}{A} .$$

E で書くと ,

$$(17) \quad \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_1 E_3 = \frac{Q}{A} .$$

よって ,

$$(18) \quad E_1 = E_3 = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{Q}{A} , \quad E_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{Q}{A} .$$

(電場の接線成分はゼロで境界条件を満たしている .)

極板間の電位差 V は ,

$$(19) \quad V = E_1(d - r) + E_2r = \left(\frac{d - r}{\varepsilon_1} + \frac{r}{\varepsilon_2} \right) \frac{Q}{A} .$$

静電容量は ,

$$(20) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{A}{\frac{d-r}{\varepsilon_1} + \frac{r}{\varepsilon_2}} .$$

- 例題 2: 誘電体を含む球形コンデンサー

- 同心状に 2 種類の誘電体を詰めた場合:

内側が誘電体 1 , 外側が誘電体 2 , 内側の極板の半径 a , 電荷 Q , 外側の極板の半径 b , 電荷 $-Q$, 誘電体 1 と誘電体 2 の境界面の半径を c とする . 電場は球対称で動径方向を向く . ガウスの法則 (の積分形) を用いると , 誘電体中で半径 r の球面上では ,

$$(21) \quad D(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} .$$

(D の法線成分は連続.) 電場は ,

$$(22) \quad E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \frac{Q}{r^2}, & a < r < c, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{Q}{r^2}, & c < r < b. \end{cases}$$

(電場の接線成分はゼロ.) 電位差は ,

$$(23) \quad \begin{aligned} \phi(a) - \phi(b) &= \int_a^b E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1} \int_a^c \frac{dr}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2} \int_c^b \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right]. \end{aligned}$$

静電容量は ,

$$(24) \quad C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(b)} = \frac{4\pi}{\left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right]}.$$

○ 上下に詰めた場合:

上半分を誘電体 1, 下半分を誘電体 2 で満す. 境界付近を考えれば, 電場の接線成分は連続で, 極板がそれぞれ等電位だから法線成分はない. 従って, 電場は動径方向を向き, 誘電体中で r のみの関数となっている. $E = E(r)$. よって,

$$(25) \quad D(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 E(r) & \text{上半分,} \\ \varepsilon_2 E(r) & \text{下半分.} \end{cases}$$

ガウスの法則を半径 $r (a < r < b)$ の球面に適用すると,

$$(26) \quad \begin{aligned} Q &= \int_{\text{上半球面}} \varepsilon_1 E(r) dS + \int_{\text{下半球面}} \varepsilon_2 E(r) dS \\ &= 2\pi r^2 \varepsilon_1 E(r) + 2\pi r^2 \varepsilon_2 E(r). \end{aligned}$$

よって,

$$(27) \quad E(r) = \frac{1}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{Q}{r^2}.$$

電位差は

$$(28) \phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) .$$

静電容量は ,

$$(29) \quad C = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{ab}{b - a} .$$