

2.2 誘電体中のガウスの法則

- 静電場について，

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

この式は (微視的な意味で) 常に正しい．ただし， $\rho(\mathbf{r})$ は全ての電荷密度．誘電体中では，

$$(2) \quad \rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r}).$$

ここで， $\rho_f(\mathbf{r})$ は 自由電荷密度 で，(手で与えた電荷を含め) 原子・分子に束縛されていない自由な電荷の密度である．

真空中では， $\rho = \rho_f$ であった．

一方，誘電体中では電場 E により分極 P が生じ，分極電荷密度 ρ_p が現われる．どのような P ， ρ_p が生じるかは誘電体の種類による．常に ρ_p を考慮しながら誘電体を取り扱うのは不便．

- 電束密度 D

式 (2. 1. 8) を用いて

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \{ \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r}) \} = \frac{1}{\varepsilon_0} \{ \rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \},$$

$$(4) \quad \nabla \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})] = \rho_f(\mathbf{r}).$$

ここで電束密度

$$(5) \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad \text{cf. 式 (1. 1. 5)}$$

を導入すれば,

$$(6) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r})} \quad \underline{\text{誘電体中のガウスの法則}}$$

を得る。(ρ_p は忘れて ρ_f だけ考えればよい。)

- 一様で等方的な誘電体では, 弱い電場に対して,

$$(7) \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \chi_e : \underline{\text{電気感受率(比例定数)}}.$$

このとき，

$$(8) \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = (\varepsilon_0 + \chi_e) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) .$$

$$(9) \quad \varepsilon (\equiv \varepsilon_0 + \chi_e) : \text{誘電率} .$$

電気感受率 χ_e ，誘電率 ε は物質 (誘電体) の性質を表す定数.

通常，分極ベクトル \mathbf{P} は \mathbf{E} と同じ方向を向くから， $\chi_e > 0$. (式 (1. 8. 32) 参照 .) 従って， $\varepsilon > \varepsilon_0$.

\Rightarrow (同じ ρ_f に対して) 電場は弱まる .

● 静電場に対するもう一つの式: $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$.

これは誘電体中でも成り立つ . なせなら，微視的に $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ が成り立っていれば，これを平均化しても $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

このことから誘電体中でも静電場について，

$$(10) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) .$$

式 (6) ， (8) を用いて，

$$(11) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \text{誘電体中のポアソン方程式.}$$

(真空中のもので, $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$, $\rho \rightarrow \rho_f$ としたただけ.)

- 時間に依存する場合.
分極ベクトルも時間と共に変化.

$$(12) \quad \rho_p(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t).$$

$$(13) \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t).$$

$$(14) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_f(\mathbf{r}, t).$$

通常の一様で等方的な誘電体については, 弱い E について,

$$(15) \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (\varepsilon: \text{定数})$$

(電磁波のように振動している場合は, 一般に ε は振動数の関数になる.)