

1.8 静電ポテンシャルの多重極展開

- 原点 O を中心とする半径 a の球内に電荷分布が収まっているとする。

$$(1) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

で $r \equiv |\mathbf{r}|$, $r' \equiv |\mathbf{r}'|$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \theta'$ とする。 r を半径 a の球の外側の点とすると, $r' < a < r$ 。このとき,

$$(2) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}}$$

を r'/r の冪級数に展開する。

$$(3) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(r'/r) \cos \theta' + (r'/r)^2}}$$
$$\equiv \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta').$$

$P_\ell(x)$ をルジャンドル (Legendre) 多項式という。最初の数項を計算してみると, $(\cos \theta' = x)$

$$(4) \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$$

一般形は, (例えば)

$$(5) \quad P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell.$$

式 (3) を式 (1) に代入して,

$$(6) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^\ell} \int \rho(\mathbf{r}') P_\ell(\cos \theta') r'^\ell dV' \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi_\ell(\mathbf{r}).$$

○ 遠方 ($r \gg a$) で最も重要な項は $\ell = 0$ の $\phi_0(\mathbf{r})$.

$$(7) \quad \phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

ただし, $Q \equiv \int \rho(\mathbf{r}) dV$ は全電荷. すなわち, 十分遠くから見れば, どのような (有限範囲の) 電荷分布も (等量の) 点電荷と見なせる.

○ 遠方で次に重要な項は $\ell = 1$ の $\phi_1(\mathbf{r})$. (もし, $Q = 0$ であれば, $\ell = 1$ の項が最も重要となる.)

$$(8) \quad \begin{aligned} \phi_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \rho(\mathbf{r}') \cos \theta' r' dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \rho(\mathbf{r}') r r' \cos \theta' dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' \end{aligned}$$

$$(9) \quad \mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV$$

を用いると,

$$(10) \quad \phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}.$$

\mathbf{p} を 電気双極子モーメント (電気双極子能率) という.

注: 一般には \mathbf{p} は本当のベクトルではない. 実際, 座標の原点を \mathbf{b} だけずらして $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}$ とすると,

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = \int (\mathbf{r}' + \mathbf{b}) \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{b}) dV' \\ &= \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{b}) dV' + \mathbf{b} \int \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{b}) dV'. \end{aligned}$$

新しい座標で見た電荷分布 $\bar{\rho}(\mathbf{r}') \equiv \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{b})$ を用いて,

$$(12) \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \bar{\rho}(\mathbf{r}') dV' + \mathbf{b} \int \bar{\rho}(\mathbf{r}') dV' = \bar{\mathbf{p}} + Q\mathbf{b}.$$

($\bar{\mathbf{p}}$ は新しい座標で見た電気双極子モーメント.)

$Q \neq 0$ のとき, \mathbf{p} は座標による。(ベクトルではない.)

$Q = 0$ のとき, $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$. 座標によらない。(ベクトル.)

○ $l = 2$ のとき,

$$(13) \quad \phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{1}{r^3} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \hat{r}_i \hat{r}_j.$$

ここで, Q_{ij} は電気四重極子モーメントで,

$$(14) \quad Q_{ij} \equiv \int (r_i r_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2) \rho(\mathbf{r}) dV.$$

○ $l \geq 3$ についても同様に展開でき, このような展開を多重極展開という.

- 例: デカルト座標で $(0, 0, d/2)$ と $(0, 0, -d/2)$ にそれぞれ $+q$ と $-q$ の点電荷がある場合 . ($d > 0$)

点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と各点電荷との距離を r_{\pm} とすると ,

$$(15) \quad r_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d/2)^2} .$$

ポテンシャルは ,

$$(16) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) .$$

$r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg d$ では ,

$$(17) \quad r_{\pm} = r \sqrt{1 \mp \frac{zd \mp d^2/4}{r^2}} = r \mp \frac{zd}{2r} + \dots .$$

$$(18) \quad \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \simeq \frac{zd}{r^3} .$$

よって ,

$$(19) \quad \phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{zd}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \mathbf{p} = qd \hat{\mathbf{z}}.$$

一般論での結果を使うならば ,

$$(20) \quad \rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}) - q\delta^3(\mathbf{r} + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}})$$

であるから ,

$$(21) \quad \int \rho(\mathbf{r}) dV = q - q = 0. \quad (\text{全電荷はゼロ})$$

よって ,

$$(22) \quad \phi_0(\mathbf{r}) = 0.$$

$$(23) \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = q \frac{d}{2} \hat{\mathbf{z}} - q \left(-\frac{d}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) = qd \hat{\mathbf{z}}$$

となり，

$$(24) \quad \phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

より，式(19)と一致する．

● 電気双極子の作る電場 ポテンシャル

$$(25) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

より， $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$ ， $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$ を用いて，

$$(26) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}. \quad (r \neq 0) \end{aligned}$$

- 例題 1: 球座標での電気双極子の作る電場
 $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$ とする .

$$(27) \quad \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} .$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ より , 式 (1. 7. 29) を用いて ,

$$(28) \quad \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial}{\partial r}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta}{r^3} , \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} , \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}\phi = 0 . \end{aligned}$$

- 外場中の電気双極子のエネルギー

外場を $\phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$ とする．電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ の $\phi_{\text{ext.}}$ 中でのエネルギーは，

$$(29) \quad W = \int \rho(\mathbf{r}) \phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) dV. \quad \text{cf. 式 (1.4.22)}$$

原点を適当に選んで，そのまわりに $\rho(\mathbf{r})$ が分布しているとする． $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ の領域で $\phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$ が緩やかに変化しているとして， $\phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$ を原点のまわりでテイラー展開すると，

$$(30) \quad \begin{aligned} \phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) &= \phi_{\text{ext.}}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_{\text{ext.}}(0) + \dots \\ &= \phi_{\text{ext.}}(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext.}}(0) + \dots \end{aligned}$$

式 (29) に代入して，

$$(31) \quad W = \phi_{\text{ext.}}(0) \int \rho(\mathbf{r}) dV - \mathbf{E}_{\text{ext.}}(0) \cdot \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV + \dots \\ = Q\phi_{\text{ext.}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext.}}(0) + \dots$$

電気双極子では $Q = 0$ ゆえ ,

$$(32) \quad W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext.}}(0).$$

\mathbf{p} と $\mathbf{E}_{\text{ext.}}$ が同じ方向のときエネルギーが最小 .