

1.7 静電場とポアソン方程式

$$(1) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0},$$

$$(2) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}).$$

静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は式 (1) を適当な境界条件のもとで解くこと
によって決定され, 静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は式 (2) から求める.

特に電荷がないところ ($\rho(\mathbf{r}) = 0$) では,

$$(3) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{ラプラス (Laplace) 方程式.}$$

● デカルト (カーテシアン) 座標では,

$$(4) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

○ 例題 1: 無限に広い平行板コンデンサー

真空中に 2 枚の無限に広い導体の板 A, B が距離 d だけ離れて平行に置かれている。導体の法線を z 軸にとり, $z = 0$ が板 A, $z = d$ が板 B であるとする。A の電位を ϕ_A , B の電位を ϕ_B とし, AB 間の電場を求める。

$\phi(\mathbf{r})$ は z のみの関数ゆえ $\phi(\mathbf{r}) = \phi(z)$ と書く。AB 間に電荷は無いから, 式 (1) より,

$$(5) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(z) = 0.$$

解は, c_0, c_1 を定数として,

$$(6) \quad \phi(z) = c_0 + c_1 z.$$

境界条件 $\phi(0) = \phi_A$, $\phi(d) = \phi_B$ より,

$$(7) \quad \phi(z) = \phi_A + \frac{\phi_B - \phi_A}{d} z.$$

式 (2) より , 電位差 $V \equiv \phi_B - \phi_A$ を用いると ,

$$(8) \quad E_z(z) = -\frac{V}{d}, \quad E_x = E_y = 0.$$

すなわち , ($V > 0$ として) 電場は板の法線方向の逆を向き , 一定である .

● 円柱 (円筒) 座標 (r, φ, z) :

$$(9) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (\text{注} : |\mathbf{r}| \neq r)$$

円柱座標の (直交) 基底ベクトルは , $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\mathbf{z}}$ で ,

$$(10) \quad \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi, \quad \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}.$$

線要素は ,

$$(11) \quad d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} dr + \hat{\boldsymbol{\varphi}} r d\varphi + \hat{\mathbf{z}} dz.$$

全微分は ,

$$(12) \quad df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} dz .$$

$$(13) \quad df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f = \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla f dr + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla f r d\varphi + \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla f dz$$

と比較して ,

$$(14) \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial z} .$$

つまり , 円柱座標 (r, φ, z) では ,

$$(15) \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

となる . あるいは ,

$$(16) \quad \nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} .$$

ラプラシアンは,

$$(17) \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi}, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{r}$$

に注意して,

$$(18) \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

○ 例題 2: 半径 a, b ($a < b$) の無限に長い同軸導体円筒
円柱座標で考える. 対称性から, $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$. 電位差を
 $\phi(b) - \phi(a) = V$ とする. 式 (3) は, 式 (18) から,

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = 0.$$

解は,

$$(20) \quad \phi(r) = c_0 + c_1 \log r.$$

$$\phi(b) - \phi(a) = V \text{ より ,}$$

$$(21) \quad \phi(r) = c_0 + \frac{V}{\log(b/a)} \log r . \quad (a < r < b)$$

電場は $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}}E_r + \hat{\boldsymbol{\varphi}}E_\varphi + \hat{\mathbf{z}}E_z = -\nabla\phi(r)$ だから , 式 (16) より

$$(22) \quad E_r = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = -\frac{V}{\log(b/a)} \frac{1}{r} , \quad E_\varphi = E_z = 0 . \quad (a < r < b)$$

● 球座標 (r, θ, φ)

$$(23) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi , \quad z = r \cos \theta .$$

基底ベクトル $\hat{\mathbf{r}} , \hat{\boldsymbol{\theta}} , \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ は ,

$$(24) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta , \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \sin \varphi - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta , \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi . \end{aligned}$$

線要素は ,

$$(25) \quad d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} dr + \hat{\boldsymbol{\theta}} r d\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}} r \sin \theta d\varphi .$$

全微分は ,

$$(26) \quad df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi .$$

$$(27) \quad df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f = \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla f dr + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \nabla f r d\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla f r \sin \theta d\varphi$$

と比較して ,

$$(28) \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

つまり , 球座標 (r, θ, φ) では ,

$$(29) \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) .$$

あるいは,

$$(30) \quad \nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

ラプラシアンは,

$$(31) \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} = \cos \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}},$$
$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -(\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

などに注意して,

$$(32) \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

体積要素は,

$$(33) \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

○ 例題 3: 半径 a, b ($a < b$) の同心導体球面
球座標で考える． $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ ．式 (3) は，式 (32) から，

$$(34) \quad \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = 0$$

解は，

$$(35) \quad \phi(r) = c_0 + \frac{c_1}{r}.$$

$\phi(b) - \phi(a) = V$ とすれば，

$$(36) \quad c_1 = \frac{ab}{a - b} V.$$

電場は $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}} E_r + \hat{\boldsymbol{\theta}} E_\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E_\varphi = -\nabla \phi(r)$ だから，式 (30) より，

$$(37) \quad E_r = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \frac{ab}{a - b} \frac{V}{r^2}, \quad E_\theta = E_\varphi = 0. \quad (a < r < b)$$

- ポアソン方程式の一般解

$|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ で $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ であるような場合を考える。(電荷が有限の範囲に分布していればよい.)

原点に単位点電荷がある場合,

$$(38) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\mathbf{r}).$$

この解は,

$$(39) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|}$$

と知っている.

$$(40) \quad G(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|}$$

とすると,

$$(41) \quad \Delta G(\mathbf{r}) = -\delta^3(\mathbf{r}).$$

この $G(\mathbf{r})$ を用いると,

$$(42) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

の解は

$$(43) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV'$$

と書ける．実際，

$$(44) \quad \begin{aligned} \Delta\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \Delta_r G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

従って，式 (42) の解は，

$$(45) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

○ 例題 4: 球対称な電荷分布: $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$.

r の方向を z 軸にとり, r と r' のなす角を θ' とする . 式 (45) は ,

$$(46) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} .$$

φ' の積分は自明で, $\int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi$. θ' の積分は ,

$$(47) \quad \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}}$$
$$= -\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{rr'} (r + r' - |r - r'|)$$
$$= \begin{cases} 2/r, & r > r' \\ 2/r', & r < r' \end{cases} .$$

よって ,

$$(48) \quad \phi(\mathbf{r}) = \phi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right] .$$

半径 r 内の電荷は ,

$$(49) \quad \begin{aligned} Q(r) &= \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \\ &= 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' . \end{aligned}$$

これを用いて ,

$$(50) \quad \phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q(r)}{r} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') r' dr' .$$

◇ 電荷が半径 a の球内にのみあるとき , 全電荷は $Q = Q(a)$.

$$(51) \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (r > a)$$

(原点に点電荷 Q があるときと同じ .)

◇ 電荷が球殻に分布している場合:

$$(52) \quad \rho(r) \begin{cases} \neq 0, & r_1 < r < r_2 \\ = 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$r < r_1$ では ,

$$(53) \quad \phi(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \rho(r') r' dr' = \text{定数} .$$

従って , $E = 0$. (電場はない .)

$r > r_2$ では , ($Q = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho(r') r'^2 dr' =$ 球殻の全電荷)

$$(54) \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (\text{点電荷と同じ})$$