5　誘電体の境界条件

- 2 種類の誘電体，誘電体 1 と誘電体 2，の境界面を考える．それぞれの誘電率を ε_1，ε_2 とし，境界面に電荷はないものとする．
- 境界面を囲む微小なうすい円筒 (底面積 ΔS) を考えて，ガウスの法則を適用すると，

(1)
$$\int \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0\,.$$

厚さがゼロの極限で，(側面からの寄与は無視できる)

(2)
$$\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 \Delta S + \boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 \Delta S = 0\,.$$

ここで，$\boldsymbol{D}_i$ は誘電体 i 中の電束密度，$\boldsymbol{n}_i$ は境界面の誘電体 i 方向の単位法線ベクトル．

(3)
$$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2 (\equiv \boldsymbol{n})$$

ゆえ，

(4)
$$(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n} = 0\,.$$

従って，$\boldsymbol{D}$ の法線成分は連続 となる．$\boldsymbol{E}$ については,

(5)
$$(\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1 - \varepsilon_2 \boldsymbol{E}_2) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

ゆえ，$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ なら，$\boldsymbol{E}$ の法線成分は不連続 となる．

○ 境界面にまたがる微小な長方形 S とその周 C を考える．
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ から,

(6)
$$0 = \int_S \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

境界面に垂直な辺の長さをゼロにする極限を考えると,

(7)
$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{t}_1 \Delta r + \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{t}_2 \Delta r = 0\,.$$

ただし，$\boldsymbol{E}_i$ は誘電体 i 中の電場，$\boldsymbol{t}_i$ は誘電体 i での長方形 S の境界面に平行な辺の方向の単位ベクトル (境界面の接ベクトル)，Δr は境界面に平行な辺の長さ．

(8) $$\boldsymbol{t}_1 = -\boldsymbol{t}_2 (\equiv \boldsymbol{t})$$

ゆえ，

(9) $$(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \cdot \boldsymbol{t} = 0\,.$$

すなわち，<u>$\boldsymbol{E}$ の接線成分は連続</u>. また，

(10) $$\left(\frac{\boldsymbol{D}_1}{\varepsilon_1} - \frac{\boldsymbol{D}_2}{\varepsilon_2}\right) \cdot \boldsymbol{t} = 0$$

より，<u>$\boldsymbol{D}$ の接線成分は不連続</u>.

- ポテンシャルについては，境界面で $\boldsymbol{D}$ あるいは $\boldsymbol{E}$ の法線成分が有限である限り，

(11) $$\phi_1 = \phi_2\,.$$

● $\boldsymbol{D}$ あるいは $\boldsymbol{E}$ の屈折の法則

境界面の誘電体 1 方向の法線ベクトルと $\boldsymbol{D}_{1(2)}$ がなす角を $\theta_{1(2)}$ とする． $\boldsymbol{D}$ の法線成分が連続ゆえ,

(12) $$|\boldsymbol{D}_1|\cos\theta_1 = |\boldsymbol{D}_2|\cos\theta_2\,.$$

$\boldsymbol{E}$ の接線成分の連続性より,

(13) $$\frac{|\boldsymbol{D}_1|}{\varepsilon_1}\sin\theta_1 = \frac{|\boldsymbol{D}_2|}{\varepsilon_2}\sin\theta_2\,.$$

よって,

(14) $$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\,.$$

(15) $$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,.$$

● 例題 1: 2 種類の誘電体を含む平行板コンデンサー

極板の面積を A，極板間の距離を d とする．誘電体 1(誘電率 ε_1) の層，誘電体 2(誘電率 ε_2) の層，再び誘電体 1 の層と 3 つの極板に平行な誘電体の層で極板間を満す．誘電体 2 の層の厚さを r とする．各極板に $\pm Q$ の電荷を与えると電場は極板に垂直で各誘電体層で一定．各層の電場 (電束密度) の大きさを E_1，E_2，E_3(D_1，D_2，D_3) とすると，$\boldsymbol{D}$ の法線成分は連続ゆえ，

(16)
$$D_1 = D_2 = D_3 = \frac{Q}{A}\,.$$

E で書くと，

(17)
$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_1 E_3 = \frac{Q}{A}\,.$$

よって，

(18)
$$E_1 = E_3 = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{Q}{A}\,, \quad E_2 = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{Q}{A}\,.$$

(電場の接線成分はゼロで境界条件を満たしている．)

極板間の電位差 V は,

(19) $$V = E_1(d-r) + E_2 r = \left(\frac{d-r}{\varepsilon_1} + \frac{r}{\varepsilon_2}\right)\frac{Q}{A}\,.$$

静電容量は,

(20) $$C = \frac{Q}{V} = \frac{A}{\frac{d-r}{\varepsilon_1} + \frac{r}{\varepsilon_2}}\,.$$

- 例題 2: 誘電体を含む球形コンデンサー

○ 同心状に 2 種類の誘電体を詰めた場合:
内側が誘電体 1, 外側が誘電体 2, 内側の極板の半径 a, 電荷 Q, 外側の極板の半径 b, 電荷 $-Q$, 誘電体 1 と誘電体 2 の境界面の半径を c とする. 電場は球対称で動径方向を向く. ガウスの法則 (の積分形) を用いると, 誘電体中で半径 r の球面上では,

(21) $$D(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\,.$$

(**D** の法線成分は連続.) 電場は,

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_1}\dfrac{Q}{r^2}, & a < r < c\,, \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_2}\dfrac{Q}{r^2}, & c < r < b\,. \end{cases} \tag{22}$$

(電場の接線成分はゼロ．) 電位差は,

$$\begin{aligned} \phi(a) - \phi(b) &= \int_a^b E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\int_a^c \frac{dr}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\int_c^b \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

静電容量は,

$$C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(b)} = \frac{4\pi}{\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right]}. \tag{24}$$

○ 上下に詰めた場合:

上半分を誘電体 1，下半分を誘電体 2 で満す．境界付近を考えれば，電場の接線成分は連続で，極板がそれぞれ等電位だから法線成分はない．従って，電場は動径方向を向き，誘電体中で r のみの関数となっている．$E = E(r)$．よって，

(25)
$$D(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 E(r) & \text{上半分}\,, \\ \varepsilon_2 E(r) & \text{下半分}\,. \end{cases}$$

ガウスの法則を半径 r($a < r < b$) の球面に適用すると，

(26)
$$\begin{aligned} Q &= \int_{\text{上半球面}} \varepsilon_1 E(r)\, dS + \int_{\text{下半球面}} \varepsilon_2 E(r)\, dS \\ &= 2\pi r^2 \varepsilon_1 E(r) + 2\pi r^2 \varepsilon_2 E(r)\,. \end{aligned}$$

よって，

(27)
$$E(r) = \frac{1}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{Q}{r^2}\,.$$

電位差は

(28) $$\phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) .$$

静電容量は,

(29) $$C = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{ab}{b - a} .$$