

第2章 物質中の電場

- 巨視的レベルでの (連続体としての) 物質の電磁氣的性質を考えたい.
- 原子の大きさ $\sim 10^{-10}m$
このスケールでは電磁場は大きく変化するが, このような原子・分子レベルでの微視的な電磁場そのものには興味はない (という立場).
- 巨視的に見れば十分小さい (点と見なせる) が, 微視的には多数の原子・分子を含むような領域で 平均化 した電磁場を考える.

1 誘電体 (Dielectrics)

- 誘電体: 自由に動ける電荷のない物質 (=絶縁体).
(電子は原子核 (イオン) に束縛されていて電流は流れない.)
⇒ 各原子・分子は中性.

- このような物質に (静) 電場をかけたとしよう.
原子核は電場の方向に少し変位し, 電子は電場の逆の方向に少し変位するだろう. その結果, 原子・分子は変形して電場方向の 電気双極子モーメント が生じる.

物質全体では, これらの電気双極子モーメントが集まり, 分極 を起こす.

- 上で説明した平均化を行なうとき, 各原子・分子は中性で, 大多数の原子・分子は考えている点から (微視的な意味で) 十分遠方にある.

⇒ 電気双極子モーメントが最も重要で, 高次のモーメント (四重極, ...) は無視できる.

⇒ 小さな電気双極子の集まりと見なせる.

物体 V の i 番目の原子・分子の座標を \mathbf{r}_i , 電気双極子モーメントを \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_i の作るポテンシャルを $\phi_i(\mathbf{r})$ とする.

$$\begin{aligned} (1) \quad \phi_i(\mathbf{r}) &= \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \end{aligned}$$

ここで, $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ を用いた. 全ての原子・分子の寄与を加えると,

$$(2) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \in V} \mathbf{p}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

微小体積 ΔV の中にある双極子モーメントを平均化し, 分極ベクトル $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ を次のように定義する.

$$(3) \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p}_i}{\Delta V}.$$

$\mathbf{P}(\mathbf{r})$ は電気双極子モーメントの平均化された体積密度である。
 微小体積 dV' にある双極子モーメントを平均化したものは、
 $\mathbf{P}(\mathbf{r}')dV'$ と書けるから、

$$(4) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

$$(5) \quad \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

を用いて、

$$(6) \quad \begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' - \int_V \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned}$$

ここで、 S は物体 V の表面で、 $d\mathbf{S}' = \mathbf{n}(\mathbf{r}')dS'$.

$$(7) \quad \sigma_p(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad \text{分極表面電荷密度}$$

$$(8) \quad \rho_p(\mathbf{r}) \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad \text{分極 (体積) 電荷密度}$$

を用いれば,

$$(9) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

$\sigma_p(\mathbf{r})$ は分極によって表面に“しみ出した”電荷を表す. 物体の一部の領域では, もし $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ が不均一なら (\mathbf{r} に依存するなら), この領域に入ってくる電荷と出ていく電荷の量が異なる可能性がある. この場合, 分極電荷密度 $\rho_p(\mathbf{r})$ が生じる.

積分領域を全空間 (物体の外) まで広げると, 表面積分の項 (第 1 項) はゼロとなり,

$$(10) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

注) 分極表面電荷密度 σ_p の寄与は, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ の物体表面での不連続性による $\rho_p(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$ に含まれる表面 δ 関数で表わされる.