

5 運動量保存則

- 式 (1. 4. 1) を全ての点電荷について和をとる.

$$(1) \quad \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i(t)}{dt} \\ = \sum_i \int_V dV q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)) [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)].$$

式 (1. 3. 14) と式 (1. 3. 16) を用いて, $q_i, q_i \mathbf{v}_i(t)$ を消去すると,

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \mathbf{v}_i(t) \right] = \int_V dV \left[(\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right. \\ \left. + \left(\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right].$$

左辺の $[\dots]$ は全点電荷の運動量.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \mathbf{D} \times \nabla \times \mathbf{E},
 \end{aligned}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \mathbf{v}_i(t) + \int_V dV \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \\
 = \int_V dV [(\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\
 - \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)].
 \end{aligned}$$

(注 : $\mathbf{D} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \mathbf{S}/c^2$.)

- 式 (4) の右辺の意味

$$(5) \quad \begin{pmatrix} T_{xx}^e & T_{xy}^e & T_{xz}^e \\ T_{yx}^e & T_{yy}^e & T_{yz}^e \\ T_{zx}^e & T_{zy}^e & T_{zz}^e \end{pmatrix} \equiv \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 \end{pmatrix} .$$

と定義する． すなわち，

$$(6) \quad T_{ij}^e(\mathbf{r}, t) \equiv \varepsilon_0 \left\{ E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \right\}, \quad i, j = x, y, z .$$

同様に，

$$(7) \quad T_{ij}^m(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{\mu_0} \left\{ B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right\} .$$

$$(8) \quad T_{ij}(\mathbf{r}, t) \equiv T_{ij}^e(\mathbf{r}, t) + T_{ij}^m(\mathbf{r}, t).$$

これを マクスウェルの応力テンソル と呼ぶ.

$$(9) \quad \mathbf{T}_i \equiv \begin{pmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \\ T_{zi} \end{pmatrix}$$

と定義して, $(\mathbf{T}_i^e, \mathbf{T}_i^m)$ も同様)

$$(10) \quad \nabla \cdot \mathbf{T}_i = \frac{\partial T_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zi}}{\partial z}$$

を考える.

$$\begin{aligned}
(11) \quad \nabla \cdot \mathbf{T}_x^e &= \frac{\partial T_{xx}^e}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}^e}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}^e}{\partial z} \\
&= \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y E_x) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) \right] \\
&= \varepsilon_0 \left[E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial E_y}{\partial y} E_x + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} E_x + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] \\
&= \varepsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_x - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) E_z \right] \\
&= \varepsilon_0 [E_x (\nabla \cdot \mathbf{E}) - E_y (\nabla \times \mathbf{E})_z + E_z (\nabla \times \mathbf{E})_y] \\
&= \varepsilon_0 [E_x (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}))_x] .
\end{aligned}$$

他の成分も同様.

よって, $\mathbf{T}^e = (\mathbf{T}_x^e, \mathbf{T}_y^e, \mathbf{T}_z^e)$ と書けば,

$$(12) \quad \nabla \cdot \mathbf{T}^e = \varepsilon_0 [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{E}] .$$

同様に,

$$(13) \quad \nabla \cdot \mathbf{T}^m = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B}] = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} .$$

式 (4) は, ($\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}^e + \mathbf{T}^m$)

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \mathbf{v}_i(t) + \frac{1}{c^2} \int_V dV \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \right] \\ = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \int_S \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} .$$

$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$ は微小面要素 $d\mathbf{S}$ に外部から加わる電磁氣的な力と考えられる.

もし系が閉じていて外部から力が加わらなければ,

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \mathbf{v}_i(t) + \frac{1}{c^2} \int_V dV \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \right] = 0.$$

第2項を V 内の電磁場の運動量と考えれば, これは運動量保存則を表す. ([...] 内の第2項が運動量の次元を持つことを確かめよ.)