

3 点電荷と電磁場から成る系

- 物質の微視的 (ミクロな) 描像

巨視的 (マクロな) 物質 → 分子 → 原子 → 原子核・電子

- 原子の大きさ: 水素原子のボーア半径 $\sim 10^{-10}m$
- 原子核の大きさ: 水素原子核 (陽子) $\sim 10^{-15}m$
- 電子の大きさ $\sim 10^{-13}m$

⇒ 原子核, 電子を点電荷とみなし, 物質を点電荷の集合体として扱うモデルを考える.

(古典電磁気学の範囲ではこれでよいが, 物質の様々な性質は量子力学によって支配されている.)

- 点電荷の数学的表現

点電荷: 空間の1点 \mathbf{a} に (有限の) 電荷 q が集中している.

$$(1) \quad \rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{a}, \\ 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{a}. \end{cases}$$

- ディラック (Dirac) の δ (デルタ) 関数

1次元の場合:

$$(2) \quad \delta(x - a) = \begin{cases} \infty, & x = a, \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

$$(3) \quad \delta(x) = \delta(-x).$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1.$$

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a). \quad (f \text{ は } a \text{ で連続とする})$$

○ 例:

$$(6) \quad \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n} \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases},$$

$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$ となる. 実際,

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n f(x) dx \\ = f(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n dx = f(0).$$

3次元の場合:

$$(8) \quad \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z).$$

○ $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ にある点電荷 q の電荷密度は,

$$(9) \quad \rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}),$$

と書ける. 今, 点電荷 q が運動しているとして, その座標を $\mathbf{x}(t)$ と書くと,

$$(10) \quad \rho(\mathbf{r}, t) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)).$$

電流密度は,

$$(11) \quad \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = q\dot{\mathbf{x}}(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)), \quad \dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t).$$

電荷保存則, 式 (1. 2. 3) は

$$\begin{aligned}
(12) \quad & \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \\
&= q \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)) + q \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)) \\
&= -q \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)) + q \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)) = 0,
\end{aligned}$$

確かに満されている。

- N 個の点電荷 q_i (質量 m_i , 座標 $\mathbf{x}_i(t)$) と電磁場からなる系を記述する方程式は, ($i = 1, \dots, N$ として)

$$(13) \quad m_i \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}_i(t) = q_i [\mathbf{E}(\mathbf{x}_i(t), t) + \dot{\mathbf{x}}_i(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i(t), t)] ,$$

$$(14) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)) ,$$

$$(15) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 ,$$

$$(16) \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sum_i q_i \dot{\mathbf{x}}_i(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)) ,$$

$$(17) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 .$$

巨視的な系では $N \sim O(10^{23})$.

式 (13)~(17) を解くのは事実上不可能.

\mathbf{E}, \mathbf{B} が与えられて, 式 (13) を解く. \Leftarrow 力学の問題

ρ, i が与えられて, 式 (14)~(17) を解く. \Leftarrow 電磁気学の問題

式 (13)~(17) を解かなくても分かることもある.