2002/08/26

電磁気学2(共通教育、田中担当クラス) 演習問題 略解

1. 略。

2. 略。

3. 略。

4. 略。

5. (a) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ から

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(r)=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)=\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\phi(r),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(r)=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi(r).$$

y,z 微分についても同様。これを

$$\triangle\phi(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(r)$$

に代入すればよい。

(b)

$$\rho=-\varepsilon_0\triangle\phi=e^{-r/a}/(a^2 r)=-\varepsilon_0\phi(r)/a^2$$

6. $\rho(r)=\rho_0\ (r<a),\ \ \rho(r)=0\ (r>a)$ とする。I 章例題 8.4 より、

$$\phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e(r)}{r}+\frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^\infty \rho(r')r'dr'.$$

よって

$$\phi(r)=\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r}\quad (r>a),\quad \phi(r)=\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3a^2-r^2)\quad (r<a).$$

エネルギーは

$$W=2\pi\int_0^\infty \phi(r)\rho(r)r^2dr=\frac{4\pi\rho_0^2}{15\varepsilon_0}a^5$$

となり、§I.4 の例題 2 の結果と一致する。

7. 地表面の微小円主(底面積 δS) にガウスの法則を適用して、$-E\delta S=\sigma\delta S/\varepsilon_0$。よって表面電荷密度 $\sigma=-\varepsilon_0 E$。地球の半径を R として、$Q=-4\pi R^2\varepsilon_0 E\simeq 4.6\times 10^5\mathrm{C}$。

8. $W = QV/2$.

9. $\boldsymbol{E}$ の接線成分は連続ゆえ、左半分と右半分で $\boldsymbol{E}$ は等しい。電位差を V とすると、$E = V/d$。ε_i の領域で $D_i = \varepsilon_i E = \varepsilon_i V/d$。極板の電荷密度は $\sigma_i = D_i = \varepsilon_i V/d$。電荷は $Q = lw\sigma_i + lw\sigma_2 = lw(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)V/d$ ゆえ、$C = Q/V = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)lw/d$。

10. このコンデンサーの容量は $C = [2l\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x]w/d$。$W = Q^2/(2C)$ ゆえ、$F = -dW/dx = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)Q^2 w/(2C^2 d)$ となる。(図の右方向に力が働く。)

11. 極板間の距離を拡げる前と後で極板の電荷は変化しない。極板間の距離を拡げる前と後の容量と電位差をそれぞれ、C_1, V_1, C_2, V_2 と書くと、$Q = C_1V_1 = C_2V_2$。極板の面積を A とすると、$C_1 = \varepsilon A/d_1$、$C_2 = A/[d_1/\varepsilon + (d_2 - d_1)/\varepsilon_0]$。よって、
$$V_2 = \frac{C_1}{C_2}V_1 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{d_2 - d_1}{d_1}\right).$$

12. (a) $\sigma_P = \boldsymbol{P} \cdot (\pm\hat{\boldsymbol{z}}) = \pm P$ (上面/下面). $\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} = 0$ (境界面を除く。)
    (b) 全空間で $\rho_f = 0$ ゆえ、全空間で $\boldsymbol{D} = 0$。誘電体の外では $0 = \boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ ゆえ、$\boldsymbol{E} = 0$。誘電体の内では $0 = \boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ より、$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{P}/\varepsilon_0 = -P\hat{\boldsymbol{z}}/\varepsilon_0$。
    (c) 誘電体の z 方向の中心を $z = 0$ とする。静電ポテンシャルは z のみの関数 $\phi(z)$ となる。$E_z = -d\phi/dz$ より、
    $$\frac{d\phi}{dz} = \frac{P}{\varepsilon_0} \quad (|z| < d), \qquad \frac{d\phi}{dz} = 0 \quad (|z| > d).$$
    $|z| < d$ で $\phi(z) = Pz/\varepsilon_0 + c_1$。$\phi(0) = 0$ として、$\phi(z) = Pz/\varepsilon_0$ $(|z| < d)$。$z > d$ で $\phi(z) = c_2$、$z < -d$ で $\phi(z) = c_3$。$z = \pm d$ での ϕ の連続性より、$c_2 = Pd/\varepsilon_0 = -c_3$。
    (d) 極板に電荷密度 $\sigma = \pm P$ を与えた極板間が真空で距離 $2d$ の平行板コンデンサーと同じ。

13. 略。

14. 電流は z 軸に沿って流れているものとする。$\boldsymbol{x}' = (0, 0, z')$ として
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dz'\hat{\boldsymbol{z}} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$
ただし、$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \hat{\boldsymbol{z}} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = r\hat{\boldsymbol{\phi}}$。

15. 円電流は xy 平面にあり、その中心を原点とする。中心軸上の点 $\boldsymbol{x} = (0, 0, z)$ での磁場は、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\boldsymbol{x}' \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}.$$

$\boldsymbol{x}' = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$、$d\boldsymbol{x}' = (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)d\theta$ と書けるから、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{z}}$$

となる。

16. 地球の半径を R、磁気双極子モーメントの大きさを m とすれば、極点では、$B = \mu_0 m/(2\pi R^3)$。よって、$m \simeq 8 \times 10^{21} \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2$。赤道上では、$B = B$(極点$)/2 \simeq 0.3\mathrm{G}$。

17. この電流の磁気双極子モーメントは $\boldsymbol{m} = \pi a^2 I \hat{\boldsymbol{z}}$。この (原点にある)$\boldsymbol{m}$ がつくる磁場は、中心軸 (z 軸) 上で

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{z^3} \hat{\boldsymbol{z}}.$$

一方、問題 15 より、

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{z}} \overset{z \to \infty}{\simeq} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{z^3} \hat{\boldsymbol{z}}$$

となり、上の結果と一致する。

`http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/tanaka/kougi.html`