電磁気学 2 演習

1. No.7 の問題 1(a) と同様にして運動量保存則を導こう。

(a) 次の式を示せ。

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i(t) + \frac{1}{c^2}\int d^3x\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)\right)$$
$$= \int d^3x \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)\times(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\times(\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)\}$$

ただし、$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$は Poynting ベクトルである。

(b) Maxwell の応力テンソル

$$T_{ij} = \varepsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\boldsymbol{E}^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\boldsymbol{B}^2\right)$$

を用いて、前問の式が

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i(t) + \frac{1}{c^2}\int d^3x\,\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)\right)_k = \int d^3x \sum_j \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j}$$

と書けることを示せ。

(c) 上式の左辺の括弧の中の第 2 項が電磁場の運動量と考えられ、上式が運動量保存則を表わしていることを説明せよ。

2. 真空中で電荷、電流が無い場合、適当なゲージをとれば Maxwell の方程式は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\,,\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\,,\quad \left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = 0\,,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = 0$$

と書ける。

(a) $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$で書かれた Maxwell の方程式から上の式を導け。

(b) 平面波$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{\epsilon}A_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ が解であることを示せ。ただし、$\omega = c|\boldsymbol{k}|$、$|\boldsymbol{\epsilon}|^2 = 1$、$\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{k} = 0$ とする。

(c) 電場と磁場が直交していることを示せ。

(d) No.7 の問題 1 より電磁場のエネルギー密度の時間平均は$\overline{w} = (\overline{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}} + \overline{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}})/2$ で与えられることがわかる。平面波の場合は$\overline{w} = (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*)/4$ と書けることを確かめ、$\overline{w}$を求めよ。

(e) 同様にして、単位時間、単位面積あたりのエネルギーの流れを表わす Poynting ベクトルの時間平均を求め、$\overline{\boldsymbol{S}} = c\overline{w}\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ であることを確かめよ。

(f) $E = cp$ となっていることを確かめよ。(E は平均エネルギー、p は平均の運動量の大きさである。)

(g) $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{k} = 0$ であるから、電磁波の進む方向$\boldsymbol{k}$を z 軸方向にとれば、例えば$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_{1(2)}$ (x(y) 軸方向の単位ベクトル) と取ることができる。このような電磁波を直線偏りを持つ電磁波であるという。$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_\pm \equiv (\boldsymbol{\epsilon}_1 \pm i\boldsymbol{\epsilon}_2)/\sqrt{2}$ とすると空間内の 1 点において$\boldsymbol{A}$(従って$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{B}$も) 大きさは変化せず回転することを示せ。このような偏りを円偏りという。

(h) $\boldsymbol{\epsilon}_i^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_j = \delta_{ij}\,,(i,j=\pm,3)$ を示せ。($\boldsymbol{\epsilon}_3$は z 軸方向の単位ベクトルである。)

(i) $\boldsymbol{D}^*\times\boldsymbol{A}$が角運動量密度の次元をを持つことを示せ。

(j) $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_\pm$のとき、$\boldsymbol{D}^*\times\boldsymbol{A}$の z 軸への射影がそれぞれ正負であることを示せ。このことから、$\boldsymbol{\epsilon}_\pm$はそれぞれ正のヘリシティー、負のヘリシティーと呼ばれる。