電磁気学 2 演習

1. 点電荷と電磁場だけからなる系を考える。i 番目の粒子の電荷、質量、座標を $q_i,\ m_i,\ \boldsymbol{r}_i(t)$ とする。

(a) 運動方程式 $m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i(t) = q_i\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i(t),t)+q_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_i(t),t)$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\partial\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)/\,\partial\,t$, $(1/\mu_0)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \epsilon_0\,\partial\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)/\,\partial\,t + \sum_i q_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i(t))$ より、

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 + \int\{\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\}\,dV\right\} = 0$$

であることを示せ。これが系の全エネルギーの保存則をあらわしていると考えると、第 2 項の積分は電磁場のエネルギーと解釈される。

(b) 有限の領域 V に対して (a) と同様のことを行い、$(1/\mu_0)\int_{\partial V}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\,d\boldsymbol{S}$が$\partial V$ を通じて流出していく単位時間あたりのエネルギーであることを示せ。このことから $(\epsilon_0/2)\,\boldsymbol{E}^2\,+(1/2\mu_0)\,\boldsymbol{B}^2$を電磁場のエネルギー密度と考えてよいことがわかる。

2. 連続的な電荷分布や電流分布も微視的には点電荷の集まりとして記述されると考えると、そのような場合にも 1. で得られた電磁場のエネルギーの表式を用いることができる。電荷や電流は有限の領域内にあるとする。

(a) 電荷分布$\rho(\boldsymbol{x})$ の作る静電場だけがあるとき、そのエネルギーが$\dfrac{1}{8\pi\epsilon_0}\iint\dfrac{\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}$ $dV\,dV'$とあらわせることを示せ。この様に、静電場のエネルギーは電荷間の相互作用エネルギー (点電荷系の場合にはクーロン力に対する力学的位置エネルギー) と読み替えることができる。

(b) 定常電流$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$ の作る静磁場のエネルギーが$\dfrac{\mu_0}{8\pi}\iint\dfrac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\,dV\,dV'$であることを示せ。この様に、静磁場のエネルギーはそれを作っている電流間の相互作用エネルギーと考えることもできる。

3. 物質があるときの電磁場のエネルギーについて調べる。

(a) 以前の演習 (No.3 の 3.) でやったアンペルの法則は、物質があるときも $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}+\partial\,\boldsymbol{D}\,/\,\partial\,t$ と書けることを示せ。ただし、$\mu_0\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)\equiv\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)\equiv\epsilon_0\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t)$ であり、$\boldsymbol{P}$は分極で物質のないところでは 0 である。物質の存在は磁化電流$\boldsymbol{i}_m$と分極電流$\boldsymbol{i}_p\equiv\partial\,\boldsymbol{P}\,/\,\partial\,t$ で代表されていると考えよ。なお、物質中での電磁場は原子の大きさのスケールでは激しく空間変化している。巨視的な議論が目的の場合には、激しく空間変化する部分は不要であるので、方程式に出てくる種々の量を巨視的な微小体積での平均量で置き換えたものとみなすことが多い。

(b) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int w(\boldsymbol{x},t)\,dV+\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)\,dV = 0$ であることを示せ。$w(\boldsymbol{x},t)\equiv\displaystyle\int^t\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t')\cdot\frac{\partial\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t')}{\partial\,t'}+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t')\cdot\frac{\partial\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t')}{\partial\,t'}\}\,dt'$である。左辺第 2 項は電流$\boldsymbol{i}$が電磁場から単位時間になされる仕事であるから、$\int w(\boldsymbol{x},t)\,dV$ が電磁場のエネルギーである。

(c) 物質のないところでは、積分定数を別にすると、w が 1.(b) のエネルギー密度と同じであることを確かめよ。

(d) $\boldsymbol{D} = \epsilon\,\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H} = \mu^{-1}\,\boldsymbol{B}$ (ϵ,μは定数) と近似できるときには、積分定数を別にすると、$w = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\,\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}$であることを示せ。