電磁気学 2 演習

1. 静的な外場として与えられたベクトルポテンシァル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ とスカラーポテシァル$\phi(\mathbf{x})$ の中を運動する電荷 e、質量の m の点電荷のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + e\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A} - e\phi$$

である。運動方程式を導き、この点電荷が Lorentz 力に従って運動していることを示せ。

2. No.2 2(b) で求めたように定常電流 $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ によって生ずるベクトルポテンシァルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d^3x'$$

である。電流分布は原点の付近のみにあるとして、原点から離れたところで多重極展開すれば $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\mathbf{A}_\ell(\mathbf{x})$、ただし

$$\mathbf{A}_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}|^{\ell+1}}\int \mathbf{i}(\mathbf{x}')|\mathbf{x}'|^\ell P_\ell(\cos\theta')\,d^3x'$$

と書ける。

(a) $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = 0$ を示せ。(ヒント：$\nabla\cdot(x_j\mathbf{i}(\mathbf{x})) = i_j(\mathbf{x})$ を示せ。)

(b) 次の式を示せ。

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

ただし、磁気双極子能率 $\mathbf{m}$ は

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2}\int \mathbf{x}\times\mathbf{i}(\mathbf{x})\,d^3x$$

で定義される。(ヒント:$(\mathbf{x}'\times\mathbf{i}(\mathbf{x}'))\times\mathbf{x} = \mathbf{i}(\mathbf{x}')(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}) - \mathbf{x}'(\mathbf{i}(\mathbf{x}')\cdot\mathbf{x})$、$\nabla'(x_j'(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x})\mathbf{i}(\mathbf{x}')) = (\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x})i_j(\mathbf{x}') + x_j'\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x}'))$

(c) 十分遠方では $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x})$ と近似できる。このとき、磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3},\quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

となることを示せ。

(d) 平面上の原点を囲む閉曲線に沿って流れる電流 I を考える。$\mathbf{m} = IS\mathbf{k}$ となることを示せ。ただし、S は閉曲線の囲む面積、$\mathbf{k}$ は平面の法線ベクトルでその方向は右ねじの進む方向である。

(e) 磁気双極子分布 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ によるベクトルポテンシァルは、2b より

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,d^3x'$$

となる。磁化電流 $\mathbf{i}_m(\mathbf{x}) = \nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{x})$ を用いて、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{i}_m(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d^3x'$$

と書けることを示せ。ただし、有限な領域でのみ $\mathbf{M}(\mathbf{x}) \neq 0$ とする。(ヒント：$\nabla'\times(\mathbf{M}(\mathbf{x}')/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$ を考えよ。)