電磁気学 2 演習

1. 定常電流iの作る静磁場Hは、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$と$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0$により決まる。半径$a$の無限に長い円筒に沿って流れる定常電流$\boldsymbol{i}=I\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}\delta(\rho-a)/2\pi\rho$が作る磁場について考えよう。円筒座標 ρ,φ,z を用いることにする。
   (a) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0$ と系の対称性から、$\boldsymbol{H}=H(\rho)\boldsymbol{e}_{\varphi}$ と書けることを示せ。
   (b) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$より、$\rho>a$ のとき $H(\rho)=\dfrac{I}{2\pi\rho}$で、$\rho<a$ のとき $H(\rho)=0$ を示せ。
   (c) $\rho>a$ の空間 (円筒の外側全体) から平面 $\{x<0,y=0\}$ を取り除いた部分を考えると、この中の任意の閉曲線に対して$\oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}=0$ であるから、磁位$\phi(\boldsymbol{x})\equiv-\int^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}$が定義できて、$\boldsymbol{H}=-\,\mathrm{grad}\,\phi$である。$\phi=\phi(\varphi)$ と書けることを示せ。さらに、φ=0 で ϕ=0 とすると、$\phi(\varphi)=-\dfrac{I}{2\pi}\varphi$ であることを示せ。
   (d) この様にして定義した磁位は、x 軸の x<0 のところで$\phi(-\pi+0)-\phi(+\pi-0)=I$ だけのとびを示す。このとびは円筒を流れる電流から生じていて、電流を囲む経路が存在するような領域に対しては磁位を定義することができないことを納得せよ。
   (e) $\rho<a$(円筒の内側) で磁位を定義できるか? 定義できるならば、それを求めよ。

2. 前回 (No.2 の 2.) 考えたように、細い導線Cに定常電流Iが流れているときにこの電流が作る磁場は$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\mu I}{4\pi}\displaystyle\int_C\frac{d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}|^3}$である。($d\boldsymbol{s}$の向きは電流と同じ向きとする。) 他方、この電流が磁場$\boldsymbol{B}$の中にあるとき、導線がこの磁場から受ける力は$I\int_C d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}$である。ふたつの閉じた導線$C_1$と$C_2$に定常電流$I_1$と$I_2$が流れている場合を考えて、それぞれの導線に働く力を求めよう。
   (a) I_1がI_2におよぼす力が$\boldsymbol{f}_2=\dfrac{\mu I_1I_2}{4\pi}\displaystyle\int_{C_1}\int_{C_2}d\boldsymbol{s}_2\times\frac{d\boldsymbol{s}_1\times(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)}{|\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1|^3}$ であることを示せ。
   (b) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$に注意して$\boldsymbol{f}_2=\dfrac{\mu I_1I_2}{4\pi}\displaystyle\int_{C_1}d\boldsymbol{s}_1\int_{C_2}\frac{d\boldsymbol{s}_2\cdot(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)}{|\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1|^3}$
   $-\dfrac{\mu I_1I_2}{4\pi}\displaystyle\int_{C_1}\int_{C_2}d\boldsymbol{s}_1\cdot d\boldsymbol{s}_2\frac{\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1}{|\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1|^3}$ と書き直せることを示せ。
   (c) C_2を境界とする曲面をS_2とすると$\displaystyle\int_{C_2}\frac{d\boldsymbol{s}_2\cdot(\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1)}{|\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1|^3}=-\int_{S_2}\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}_1|}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ であることを示せ。これより$\boldsymbol{f}_2=-\dfrac{\mu I_1I_2}{4\pi}\displaystyle\int_{C_1}\int_{C_2}d\boldsymbol{s}_1\cdot d\boldsymbol{s}_2\frac{\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1}{|\boldsymbol{s}_2-\boldsymbol{s}_1|^3}$が得られ、同様にして、$I_2$が$I_1$におよぼす力$\boldsymbol{f}_1=-\dfrac{\mu I_2I_1}{4\pi}\displaystyle\int_{C_2}\int_{C_1}d\boldsymbol{s}_2\cdot d\boldsymbol{s}_1\frac{\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_2|^3}=-\boldsymbol{f}_2$が得られる。この様にして、ふたつの閉じた電流が互いにおよぼしあう力は、力学で仮定される作用反作用の法則を満たしていることがわかる。

3. 静電場と静磁場に関する知識を手がかりにして、電荷密度、電流密度、電磁場が時間変化する場合の電磁場の法則について考えよう。
   (a) 任意の領域の全電荷の増加量はその領域の表面を通して流入する電荷の総量と同じでなければならない。このことがρと$\boldsymbol{i}$の間に常に成り立たなければならない関係式 $\partial\rho/\partial t+\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}=0$ を与えることを示せ。
   (b) 静磁場を決める方程式のひとつ $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$(アンペルの法則) の div を取ってみると $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}=-\partial\rho/\partial t$ であるから、$\partial\rho/\partial t\neq0$ の場合にはアンペルの法則はそのままの形では成り立たないことがわかる。ガウスの法則が $\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t)$ とそのままの形で成り立つと仮定して、アンペルの法則を $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)+\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ と修正すればよいことを示せ。この$\partial\boldsymbol{D}/\partial t$は変位電流と呼ばれていて、時間変化する電場も電流と同様に磁場を作れることをあらわしている。