電磁気学 2 演習

1. 一般の誘電体では誘電率や透磁率は電磁波の振動数の関数になっている。このような媒質を分散性媒質と呼ぶ。一様で等方的な分散性媒質では$\tilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{x},\omega)=\varepsilon(\omega)\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},\omega)$、$\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},\omega)=\mu(\omega)\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x},\omega)$ となる。ただし、$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},\omega)$ 等は$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ 等の Fourier 成分を表わす。すなわち、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\int\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega$ 等の関係がある。
   (a) 適当なゲージをとれば、ベクトルポテンシャルを用いて Maxwell 方程式から、
   $$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},\omega)=i\omega\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\omega)\,,\quad \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},\omega)=\nabla\times\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\omega)\,,\quad \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\omega)=0$$
   $$\left[\triangle+\frac{\omega^2}{v(\omega)^2}\right]\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\omega)=0$$
   と書けることを示せ。ただし、$v^2(\omega)=1/\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$ である。
   (b) ベクトルポテンシャルが
   $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\int d^3k\left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(k)t)}+\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{k})e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(k)t)}\right]$$
   と書けることを示せ。ただし、$k=|\boldsymbol{k}|$ で、$\omega(k)$ は$\omega=v(\omega)k$ の解である。
   (c) 各平面波の位相の進む速さ (位相速度) は $v_p=v(\omega)=\omega(k)/k=c/n(\omega)$ である。一方、群速度は$\boldsymbol{v}_g=\partial\omega(\boldsymbol{k})/\partial\boldsymbol{k}$ で定義される。$a(\boldsymbol{k})$ が$\boldsymbol{k}_0$を中心としてせまい範囲でのみゼロでないような波束を考え、$\omega(\boldsymbol{k})$ を$\boldsymbol{k}_0$のまわりで展開することにより、$\boldsymbol{v}_g$ が波束の進む速度を表わすことを示せ。
   (d) $\omega(\boldsymbol{k})=\omega(k)$ のとき、群速度が
   $$v_g=\frac{c}{n(\omega)+\omega\frac{\partial n(\omega)}{\partial\omega}}$$
   と書けることを示せ。
2. 陽イオンと電子に電離している気体 (プラズマ) に$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\omega t$ で表される電磁波が入射したとする。このとき、陽イオンは重いのであまり動かず電子のみが動く。
   (a) 磁場の影響を無視すると電子の運動方程式は $md\boldsymbol{v}/dt=e\boldsymbol{E}$である。これを解き、電流密度を求めよ。ただし、電子密度を N とする。
   (b) $\nabla\times\boldsymbol{H}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t+i$の右辺を評価し、プラズマ中での誘電率が$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0(1-\omega_p^2/\omega^2)$ となることを示せ。ただし、$\omega_p=\sqrt{Ne^2/m\varepsilon_0}$はプラズマ振動数である。
   (c) 以下、プラズマ中の比透磁率は近似的に 1 であるとする。屈折率を求めよ。
   (d) 位相速度と群速度を求めよ。
3. 物質中の電子を原子により束縛された調和振動子として近似し、さらに電子の速度に比例した減衰力が働いている場合を考える。この物質に電磁波が入射している。磁場を無視すると電子の運動方程式は $m(d^2\boldsymbol{x}/dt^2+\gamma d\boldsymbol{x}/dt+\omega_0^2\boldsymbol{x})=eE(\boldsymbol{x},t)$ である。
   (a) 電子の変位は小さいとして電場は電子の平均位置の値で近似できるとする。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}$として、1 個の電子の双極子モーメントへの寄与が
   $$\boldsymbol{p}=\frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\boldsymbol{E}$$
   となることを示せ。
   (b) 電子密度を N として誘電率を求めよ。
   (c) 高い振動数では上の結果はどう解釈されるか。
   (d) 導体では$\omega_0=0$ と考えられる。2b と同様にして電気伝導率が
   $$\sigma=\frac{Ne^2}{m(\gamma-i\omega)}$$
   と書けることを示せ。