電磁気学 2 演習

ベクトル解析の復習

$\varphi(x,y,z)$ と $\vec{A}(x,y,z)$ などを任意のスカラー場とベクトル場とする。また、ラプラシアンを $\triangle \equiv \nabla^2$ と書くことにする。V と S を任意の体積と曲面、∂V と ∂S をそれらの境界とする。

[1] 次の各式が成り立つことを示せ。

(1) $\mathrm{grad}(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_2 \,\mathrm{grad}\,\varphi_1 + \varphi_1 \,\mathrm{grad}\,\varphi_2$

(2) $\mathrm{grad}\,\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = (\vec{A}_2 \cdot \nabla)\vec{A}_1 + (\vec{A}_1 \cdot \nabla)\vec{A}_2 + \vec{A}_2 \times \mathrm{rot}\,\vec{A}_1 + \vec{A}_1 \times \mathrm{rot}\,\vec{A}_2$

(3) $\mathrm{div}\,\varphi\vec{A} = \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \vec{A} + \varphi \,\mathrm{div}\,\vec{A}$

(4) $\mathrm{div}\,\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = \mathrm{rot}\,\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 - \vec{A}_1 \cdot \mathrm{rot}\,\vec{A}_2$

(5) $\mathrm{rot}\,\varphi\vec{A} = \mathrm{grad}\,\varphi \times \vec{A} + \varphi \,\mathrm{rot}\,\vec{A}$

(6) $\mathrm{rot}(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) = (\vec{A}_2 \cdot \nabla)\vec{A}_1 - (\vec{A}_1 \cdot \nabla)\vec{A}_2 - \vec{A}_2 \,\mathrm{div}\,\vec{A}_1 + \vec{A}_1 \,\mathrm{div}\,\vec{A}_2$

(7) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$

(8) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0$

(9) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \triangle\vec{A}$

[2] ガウスの定理 $\int_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ に注意して、

(1) $\int_V \mathrm{grad}\,\varphi_1 \cdot \mathrm{grad}\,\varphi_2\ \mathrm{d}V + \int_V \varphi_1 \triangle\varphi_2\ \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \varphi_1 \,\mathrm{grad}\,\varphi_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ を示せ。これより、
$\int_V (\varphi_1\triangle\varphi_2 - \varphi_2\triangle\varphi_1)\ \mathrm{d}V = \int_{\partial V} (\varphi_1 \,\mathrm{grad}\,\varphi_2 - \varphi_2 \,\mathrm{grad}\,\varphi_1) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ であることがわかる。

(2) $\int_V \mathrm{grad}\,\varphi\ \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \varphi\ \mathrm{d}\vec{S}$ と $\int_V \mathrm{rot}\,\vec{A}\ \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S} \times \vec{A}$ を示せ。

[3] ストークスの定理 $\int_S \mathrm{rot}\,\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ に注意して、

(1) $\int_S \mathrm{d}\vec{S} \times \mathrm{grad}\,\varphi = \oint_{\partial S} \varphi\ \mathrm{d}\vec{s}$ を示せ。

(2) ベクトル場 $\vec{E}(x,y,z)$ に関して、次の A, B, C が互いに等価であることを示せ。

A: どこでも、$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ である。

B: 任意の閉曲線に対して、$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$ である。

C: $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi$ であるようなスカラー関数 $\phi(x,y,z)$ を定義することができる。

(実は、$\phi(\vec{x}) = -\int^{\vec{x}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \mathrm{const.}$ である。)