2021/07/12 出題

電磁気学 1 演義 第 11 回

アドバンストクラス追加問題

1. 電気感受率 $\tilde{\chi}(\omega)$ の ω が大きいときの振舞は，応答関数 $\chi(t)$ の $t \sim 0$ での性質で支配されている．$\tilde{\chi}(\omega)$ の実部 $\tilde{\chi}_1(\omega)$ と虚部 $\tilde{\chi}_2(\omega)$ が，$\omega \to \infty$ で

$$\tilde{\chi}_1(\omega) = O(1/\omega^2)\,,\ \tilde{\chi}_2(\omega) = O(1/\omega^3)\,, \tag{1}$$

であることを示せ．ヒント: $e^{i\omega\infty}$ のような項は 0 としてよい．

2. Kramers-Kronig の関係式と振動子強度和則について考察しよう．

(a) プラズマ振動数 ω_p を，

$$\omega_p^2 := -\lim_{\omega\to\infty} \omega^2 \tilde{\chi}(\omega)\,, \tag{2}$$

で定義する．前問の結果と Kramers-Kronig の関係式を用いて，和則

$$\omega_p^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega\, \omega \tilde{\chi}_2(\omega) \tag{3}$$

を導け．

(b) ローレンツモデルでは，

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{N_0 e^2}{m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - 2i\gamma_j\omega} \tag{4}$$

である．式 (3) の右辺をローレンツモデルで評価し，$\sum_j f_j$ を求めよ．ヒント：$0 < b/2 < a$ のとき，

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{(x^2-a^2)^2 + b^2x^2} = \frac{\pi}{2b}\,. \tag{5}$$

(実際の物理系では，a，b の関係は満たされているとしてよい．)