

電磁気学1演義 第10回 アドバンストクラス追加問題

$z > 0$ が一様で等方的な誘電体で満たされている. ($z < 0$ は真空.) この誘電体に $+z$ 方向に進む直線偏光平面波 $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(k_0 z - \omega t)}$ が入射している.

- 振動電場によって誘電体を構成する原子 (または分子) に振動する分極が誘導され, 電気双極子輻射が生じる. 誘電体中の電場を $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{x}} E(z) e^{-i\omega t}$ とおき, 電気感受率を χ とすると, 微小体積 dV' に生じる電気双極子モーメント $d\mathbf{p} e^{-i\omega t}$ は, $d\mathbf{p} = \hat{\mathbf{x}} \chi E(z') dV'$ となる. (講義の χ とは ϵ_0 だけ定義が異なることに注意.) dV' の座標を円筒座標で $\mathbf{r}' = (\rho, \varphi, z')$ として, z 軸上の場所 $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ での電気双極子輻射のベクトルポテンシャル $d\mathbf{A} e^{-i\omega t}$ が次のようになることを示せ.

$$d\mathbf{A} = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \chi \hat{\mathbf{x}} \rho d\rho d\varphi dz' E(z') \frac{e^{ik_0 R}}{R} \quad (1)$$

ただし, $k_0 = \omega/c$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2}$. (講義で習った電気双極子輻射についての結果を用いてよい.)

- φ および ρ の積分を実行すると,

$$d\mathbf{A} = \frac{c\mu_0}{2} \chi \hat{\mathbf{x}} dz' E(z') e^{ik_0 |z - z'|} \quad (2)$$

となることを示せ. ($z - z' > 0$ の場合は $+z$ 方向に進む波を表し, $z - z' < 0$ は $-z$ 方向に進む波を表す.) ヒント: $e^{ik_0 \infty}$ のような振動項は, 0 としてよい.

- 電気双極子輻射の電場 $d\mathbf{E} e^{-i\omega t}$ が,

$$d\mathbf{E} = \frac{ik_0}{2\epsilon_0} \chi \hat{\mathbf{x}} dz' E(z') e^{ik_0 |z - z'|} \quad (3)$$

となることを示せ. ヒント: まず $d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A}$ を求め, $d\mathbf{E} = c d\mathbf{B} \times (\pm \hat{\mathbf{z}})$ を用いるとよい. 複号は波の進行方向, つまり $z - z'$ の符号に対応.

- 誘電体中の電場は, 入射電場, $+z$ 方向の輻射場, および $-z$ 方向の輻射場の和であるから,

$$E(z) = E_0 e^{ik_0 z} + \frac{ik_0 \chi}{2\epsilon_0} \left[\int_0^z dz' E(z') e^{ik_0(z-z')} + \int_z^\infty dz' E(z') e^{-ik_0(z-z')} \right] \quad (4)$$

という関係が成り立つ. $E(z) = A e^{ikz}$ とおいて, 上の式から k , A を決定し, 屈折率 $n := k/k_0$ と χ の関係が正しく得られていることを示せ. (入射波の $e^{ik_0 z}$ 成分が消え, e^{ikz} 成分が生じていることが分かるだろう. これは **Ewald-Oseen の消滅定理** の一例である.)