

電磁気学1 演義 第4回 アドバンストクラス追加問題

電磁波のエネルギー，電場，磁場の関係を調べるために，次のような真空中の電磁波を考える．

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

ただし， \mathbf{E}_0 ， \mathbf{k} は実定数ベクトルで， $|\mathbf{k}| = \omega/c$ ， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ である．これは \mathbf{k} 方向へ進む単色平面波を表している．

1. $|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|/|\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)| = Z_0$ を示せ．ただし， $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\mu_0$ ， Z_0 は「真空のインピーダンス」で， $Z_0 := \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ である．
2. Z_0 が抵抗の次元を持つこと示し，その値を求めよ．ただし， $c = 3 \times 10^8$ m/s， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m とする．(注) c の値はもちろん近似値であるが， μ_0 の値も近似値である．これは 2019 年 5 月の国際単位系 (SI) の改定で，電流 (アンペア, A) に代わり，基本単位として電荷 (クーロン, C) が定義されたことによる．
3. ポインティングベクトルが $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{k}} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)/Z_0$ となることを示せ．ただし， $\hat{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} 方向の単位ベクトルである．
4. ポインティングベクトルの大きさの時間平均 \bar{S} は $\bar{S} = E_{\text{RMS}}^2/Z_0$ と表すことができる．ただし， E_{RMS} は電場 \mathbf{E} の RMS (root mean square, 2 乗の平均の平方根) で， $E_{\text{RMS}} := \sqrt{\overline{\mathbf{E}^2}}$ である．地表での太陽からの光のエネルギーフラックス (\bar{S}) は，およそ 1 kW/m^2 である．電場 \mathbf{E} ，磁場 \mathbf{B} の RMS を求めよ．(有効数字 1 桁，SI 単位系．)
参考: 地磁気の大きさは，場所にも依るが，およそ 5×10^{-5} T である．
5. 太陽光は最初に導入したような単色電磁波ではなく，様々な振動数の電磁波の重ね合わせである．前問の計算の妥当性を議論せよ．