

電磁気学1 演義 第1回 アドバンストクラス追加問題

「発散と回転をある領域内で与え、境界での法線成分も指定すると、ベクトル場はその領域で一意的に決まる」ことを証明しよう。2つのベクトル場 $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ が領域 V で同じ発散, 回転を持ち, V の境界 S で同じ法線成分を持つとする。このとき $\mathbf{A} := \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ が V で恒等的に 0 であることを示せばよい。

1. ラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を満すスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ を用いて, $\mathbf{A} = \nabla\phi$ と書けることを示せ。(ポテンシャル理論の結果を用いてよい。)
2. スカラー場 $f(\mathbf{r})$, $g(\mathbf{r})$ について, $\nabla \cdot (f\nabla g)$ の領域 V での積分を考えることで, グリーンの定理 (の一つ)

$$\int_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S} = \int_V f \nabla \cdot \nabla g dV + \int_V \nabla f \cdot \nabla g dV \quad (1)$$

を導け。

3. $f = g = \phi$ と置くことで, V で $\mathbf{A} = 0$ であることを示せ。
4. ベクトル場 \mathbf{A} の力線の様子から, この結果の直感的な説明を考えよ。(ヒント: 発散は「湧き出し・吸い込み」, 回転は「渦 (ループ)」に対応する。)

このことから, マクスウェル方程式が電磁場の発散, 回転で表現されていることがもっともらしいと思えるだろう。