電磁気学１演義　　　　　　　第 9 回　2019 年 6 月 17 日

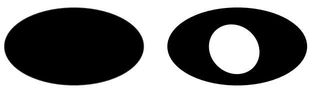
0. 複数の孤立した導体の集まり $i = 1, 2, \ldots, N$ を考えると、それぞの持つ電荷 Q_i と、それぞれの電位 ϕ_j の間には次式のように線形な関係がなりたつ。(電位が十分小さい限り) $\phi_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{-1} Q_j$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ となる。ここで、C_{ij} は容量係数と呼ばれ、導体の配置、それぞれの形状など、幾何学的条件のみによって決まる。これを用いると、導体系の静電エネルギーは $U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} C_{ij} \phi_i \phi_j$ となることを示せ。ここで $C_{ij} = C_{ji}$(相反関係) が成り立つとして良い。[講義では導出を省略した。] (ヒント：無限遠から少しずつ電荷を運ぶプロセスを仮想的に考えてみる。例えば最初に 1 番目の導体の電荷を 0 から Q_1 まで増やし、次に 2 番目の導体の電荷を Q_2 に、という要領でやってゆくことを考えてみよ。)

1. 図のような導体を考える。形の詳細は重要ではない。

   (1) a) のように穴のない、導体の塊がある。これに電荷 Q を与えるとどこに分布するか？

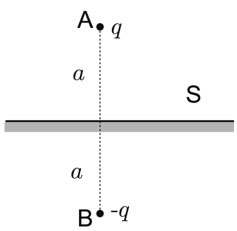
   (2) これに b) のように空洞をつくる。電荷の分布はどのようになるか？

   (3) 空洞の中の適当な位置に電荷 Q' を置いたとする。電荷の分布はどうなるか?



$a)$　　$b)$

2. 無限遠まで平らに続く導体の表面 S から、距離 a だけ離れた点 A に点電荷 q をおくとき、この導体上方に作られる電位と、S の上に誘導される電荷の密度 (表面電荷密度) を求めよ。またその総量を求めよ。導体面を $z = 0$ とし、点 A は z 軸上にあるとせよ。[1]



[1]（ヒント）ここで仮想的に導体を取り去り、平面 S に関する A の対称点 B に架空の電荷 $-q$ をおいたときに、q と $-q$ で作られる電場を考えてみよ。元の問題とは別の問題であるが、その答えの $z > 0$ の部分を利用できる。以下を参考に、なぜこれで良いのか考えよ。(この解法は「鏡像法」（または「電気映像法」）と呼ばれている。) 静電ポテンシャル ϕ はポワソン方程式 $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$ に従う。ある領域でポワソン方程式が成り立つとき、その解は、その領域の境界面上各点での ϕ の値または勾配の値 $\nabla\phi$ を指定することによって一意に定まる。(講義ノート 0 章 12 参照) このことを踏まえると、鏡像法の理屈がわかるだろう。