電磁気学１演義　　　　　　　第８回　2018 年 6 月 10 日

0. 真空中の Maxwell 方程式は以下のとおりである。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

(a) スカラーおよびベクトルポテンシャル $(\phi, \boldsymbol{A})$ を用いて

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

としてみる。Maxwell 方程式のうち、2 つの式はこれで満たされていることを示せ。また、ある任意の場 $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$、$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$ としても $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$ は不変であることを示せ。

(b) Lorentz ゲージ $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$ を要請すると、Maxwell 方程式の残りの 2 式から

$$\Box\,\phi = -\rho/\epsilon_0 \qquad \Box\,\boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

が得られることを示せ。[講義では後者の導出を省略した。] ここで $\Box = \Delta - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$ また $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ である。

(c) ここで、χ は波動方程式 $\Box\,\chi = 0$ にしたがうことを示せ。

場 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ が波動方程式

$$\Box\,\psi(\boldsymbol{r}, t) = s(\boldsymbol{r}, t) \qquad \text{ただし} \qquad \Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

に従うとする。右辺の $s(\boldsymbol{r}, t)$ は場を作る source を表わす。無限遠で 0 になる解は

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \int dV' dt' G(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|, t - t') s(\boldsymbol{r'}, t') = -\frac{1}{4\pi}\int dV' \frac{s(\boldsymbol{r'}, t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}$$

と書ける。ここで $G(r, t)$ は、$s(\boldsymbol{r}, t) = \delta^3(\boldsymbol{r})\delta(t)$ の場合の特別解 (Green 関数) で、3 次元での具体的な形は $G(r, t) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t - r/c)}{r}$ であることを用いた。

1. 真空中の無限に広い面 $x = 0$ の上を、均一な電流が y 方向に流れている場合を考える。電流は、時刻 $t = 0$ にスタートしたとする。ただしこの面は電気的に中性で表面電荷密度は 0 とする。[1] 電流密度は $\boldsymbol{j} = K\delta(x)\theta(t)\hat{\boldsymbol{y}}$ と表せる。対称性

[1] この例題は、ファインマン物理学 18 章、20 章で議論されている。参考にせよ。ただしここでは違う方法 (ファインマン物理学では 21 章) で取り組む。

から物理量は (x,t) のみの関数であるとして良いだろう。この系の磁場 $\boldsymbol{B}(x,t)$ および電場 $\boldsymbol{E}(x,t)$ を求めたい。

(参考) 電流が定常的に流れ続けている場合は No4-1-(c) で考えた。その結果から、十分時間が経過したのちには静磁場 $B(x) = -\frac{\mu_0 K}{2}\mathrm{sgn}(x)\hat{z}$ ができていると期待される。ここで $\mathrm{sgn}(x) \equiv 2\theta(x) - 1$ で x の符号を返す関数である。

(a) 電荷、電流によって生じる電磁場はポテンシャル (A, ϕ) から求めることができる。今回の 0. でやったようにローレンツゲージを取ればベクトルポテンシャル A、スカラーポテンシャル ϕ はそれぞれ電流密度、電荷密度を source とする波動方程式

$$\Box\,\phi(\boldsymbol{r},t) = -\rho(\boldsymbol{r},t)/\epsilon_0 \qquad \Box\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = -\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$$

に従う。今、電荷密度が 0 なので、スカラーポテンシャル ϕ は 0 である。系の対称性からベクトルポテンシャルも $\boldsymbol{A}(x,t)$ のように x、t のみの関数で、例えば点 $(x,0,0)$ を選んで計算すれば良いであろう。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x,t)$ を求めよ。(ヒント：x 軸を中心とする円筒座標系が便利である。)

(b) 上の結果から、電場と磁場を求めよ。(ヒント：階段関数 $\theta(x)$ の x 微分はデルタ関数 $\delta(x)$ である。また $f(a) = 0$ ならは $f(x)\delta(x-a) = 0$ として良い。)

(c) 時刻 $t(>0)$ における電磁場のエネルギー密度 $u_{\mathrm{em}}(x,t)$、ポインテイングベクトル $\boldsymbol{S}(x,t)$ を求めよ。エネルギー密度の空間分布の様子を図示せよ。

(d) その後、ある時刻 $t_1(>0)$ で電流を止めた場合を考える。時刻 $t(>t_1)$ での電磁場のエネルギーの空間分布を図示せよ。(ヒント：電流を切ることを「重ね合わせ」で考えると？)