電磁気学 1 演義　　　第 1 回　2019 年 4 月 8 日[1]

0. 3 次元空間の任意のベクトル $\mathbf{A}$ は x,y,z 方向の単位ベクトル $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ を基底として $\boldsymbol{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} = (A_x, A_y, A_z)$ のように表せる。$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ は正規直交系になっている。また、$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$,$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$,$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ である。以下、x,y,z 方向を、1,2,3 方向と呼び直すこともあり、$\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$,$\hat{e}_3 = \hat{z}$ としておく。これを用いてレビ・チビタの記号 $\epsilon_{ijk} \equiv (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)_i$ を定義しておく。表記の簡単化のためにアインシュタインの既約を用いている場合があることに注意せよ（同じ添字について和をとる)。
   - (a) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_i B_i$ を示せ。
   - (b) $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$ を示せ。
   - (c) ϵ_{ijk} で (i)3 つの添字が全て異なっていなければ 0 であることを確かめ、(ii) の添字の順番を一つ入れ替えるごとに符号が変わることを確かめ、(iii) ゼロでないものを全て求めよ。
   - (d) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ が成り立つことを示せ。

1. 次のベクトルの等式を証明せよ。
   - **(a)** $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}$
   - **(b)** $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
   - **(c)** $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$

2. 3 次元空間の場所 $\vec{r} = (x, y, z)$ の関数である任意のスカラー関数 $\phi(\vec{r})$ とベクトル $\boldsymbol{A}(\vec{r})$ に関して、以下の式を証明せよ

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

3. ガウス積分、デルタ関数に関連する問題
   - (a) $\alpha > 0$ として次の関係式。(ヒント: 求めたい積分を I とすると $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} = ...$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

     これはガウス積分と呼ばれ、物理で良く用いられる。

---

[1] yoshino@cmc.osaka-u.ac.jp 今後、問題・略解は次週の授業後 `http://www.cp.cmc.osaka-u.ac.jp/~yoshino/Teaching/Electromagnetism1/2019/index.html` に掲載してゆきます。

(b) $n = 1, 2, 3, \ldots$ として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-\alpha x^2}$$

を求めよ。(ヒント:上の結果の両辺を α で微分してみよ。)

(c) これを用いると $f(x)$ を任意の関数として

$$\lim_{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\Delta}}}{\sqrt{2\pi\Delta}} = f(a)$$

となることを示せ。(ヒント：$f(x)$ を $x = a$ のまわりで形式的にテーラー展開してみよ。)

この結果からデルタ関数の一つの表し方として、$\delta(x-a) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\Delta}}}{\sqrt{2\pi\Delta}}$ が得られる。デルタ関数を用いると、点電荷の集まりの電荷密度場などを容易に表せる。