電磁気学 1 演義　　　　第 9 回　2018 年 6 月 19 日

場 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ が波動方程式

$$\Box\,\psi(\boldsymbol{r},t) = s(\boldsymbol{r},t) \qquad \text{ただし} \qquad \Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

に従うとする。右辺の $s(\boldsymbol{r},t)$ は場を作る source を表わす。無限遠で 0 になる解は

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \int dV'dt'G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|,t-t')s(\boldsymbol{r'},t') = -\frac{1}{4\pi}\int dV'\frac{s(\boldsymbol{r'},t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

と書ける。ここで $G(r,t)$ は、$s(\boldsymbol{r},t) = \delta^3(\boldsymbol{r})\delta(t)$ の場合の特別解 (Green 関数) で、3 次元での具体的な形は $G(r,t) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t-r/c)}{r}$ であることを用いた。

0. ドップラー効果を考えてみよう。場を作る source として、移動しながら周波数 f_0 で振動する「音源」のようなものを考え、$s(\boldsymbol{r},t) = s_0\cos(2\pi f_0 t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t))$ としてみよう。$\boldsymbol{r}_0(t)$ は時刻 t での source の位置を表す。

   (a) この source が作る場は次のように表せることを示せ。

   $$\psi(\boldsymbol{r},t) = -C\frac{s_0}{4\pi}\frac{\cos(2\pi f_0 t^*)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t^*)|} \qquad \text{ただし} \qquad t^* = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t^*)|}{c}$$

   ここで C はヤコビアンによる因子であるが、あらわな形は考えなくて良い。またデルタ関数 $\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t))$ の引数が 0 になる t が複数ある場合は考えなくて良い。

   (b) x 軸上を移動する source $\boldsymbol{r}_0(t) = -vt\hat{x}$ $(c > v > 0)$ がある場合、原点で観測される場を考えてみよう。source は時刻 $t = 0$ で原点を通過する。観測される実効的な周波数 f は $f = \frac{c}{c\mp v}f_0$ のようになることを示せ。ここで符号 $\mp$ は、$t < 0$、$t > 0$ にそれぞれ対応している。

1. 真空中の無限に広い面 $x = 0$ の上を、均一な電流が y 方向に流れている場合を考える。電流は、時刻 $t = 0$ にスタートしたとする。ただしこの面は電気的に中性で表面電荷密度は 0 とする。[1] 電流密度は $\boldsymbol{j} = K\delta(x)\theta(t)\hat{\boldsymbol{y}}$ と表せる。対称性から物理量は (x,t) のみの関数であるとして良いだろう。この系の磁場 $\boldsymbol{B}(x,t)$ および電場 $\boldsymbol{E}(x,t)$ を求めたい。

   (参考) 電流が定常的に流れ続けている場合は No5-2 で考えた。その結果から、十分時間が経過したのちには静磁場 $B(x) = -\frac{\mu_0 K}{2}\mathrm{sgn}(x)\hat{z}$ ができていると期待される。ここで $\mathrm{sgn}(x) \equiv 2\theta(x) - 1$ で x の符号を返す関数である。

---

[1] この例題は、ファインマン物理学 18 章、20 章で議論されている。参考にせよ。ただしここでは違う方法 (ファインマン物理学では 21 章) で取り組む。

(a) 電荷、電流によって生じる電磁場はポテンシャル (A, ϕ) から求めることができる。No 8-2 でやったようにローレンツゲージを取ればベクトルポテンシャル A、スカラーポテンシャル ϕ はそれぞれ電流密度、電荷密度を source とする波動方程式

$$\Box\,\phi(\boldsymbol{r}, t) = -\rho(\boldsymbol{r}, t)/\epsilon_0 \qquad \Box\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = -\mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$$

に従う。今、電荷密度が 0 なので、スカラーポテンシャル ϕ は 0 である。系の対称性からベクトルポテンシャルも $\boldsymbol{A}(x, t)$ のように x、t のみの関数で、例えば点 $(x, 0, 0)$ を選んで計算すれば良いであろう。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x, t)$ を求めよ。(ヒント：x 軸を中心とする円筒座標系が便利である。)

(b) 上の結果から、電場と磁場を求めよ。(ヒント：階段関数 $\theta(x)$ の x 微分はデルタ関数 $\delta(x)$ である。また $f(a) = 0$ ならは $f(x)\delta(x - a) = 0$ として良い。)

(c) 時刻 $t(> 0)$ における電磁場のエネルギー密度 $u_{\mathrm{em}}(x, t)$、ポインテイングベクトル $\boldsymbol{S}(x, t)$ を求めよ。エネルギー密度の空間分布の様子を図示せよ。

(d) その後、ある時刻 $t_1(> 0)$ で電流を止めた場合を考える。時刻 $t(> t_1)$ での電磁場のエネルギーの空間分布を図示せよ。(ヒント：電流を切ることを「重ね合わせ」で考えると？)