電磁気学 1 演義　　　　第 3 回　2018 年 4 月 24 日

0. 真空中に内径 a、外径 b の球殻があり、電荷 Q が一様に分布している。

   (1) 電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

   (2) これによって生じる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

   ヒント：電荷分布は原点を中心として球対称であることに留意せよ。

1. 真空中に内径 a、外径 b の無限に長い円筒があり、単位長さあたり $\lambda(>0)$ の電荷が一様に分布している。これによってできる、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

   ヒント：電荷分布は円筒の軸を中心として回転対称であることに留意せよ。

2. 静電ポテシャルが原点を中心として球対称、すなわち $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r)$ ただし $r = |\boldsymbol{r}|$ と表せるとする。このときの電荷の分布を考える。定義から電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$、また Maxwell 方程式より電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ である。

   (a) 電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ のような形で表せることを示せ。

   (b) 電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E(r))$ と表せることを示せ。

   (c) 原点を中心とする内径 $a(>0)$, 外径 $b(>0)$ の球殻状の領域に含まれる電荷量を $Q(a,b)$ とする。$Q(a,b) = 4\pi\epsilon_0[b^2E(b) - a^2E(a)]$ となることを示せ。(ヒント：(b) の結果を体積積分)

   (d) 原点を中心とする半径 r の球の内部を $V(r)$ とする。$V(r)$ に含まれる電荷の総量を $Q(r)$ とする．$Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)$ となることを示せ。(ヒント：ガウスの発散定理)

   (e) 具体的に

   $$\phi(r) = \frac{q_0}{\epsilon_0}\frac{e^{-kr}}{r}$$

   の場合を考えてみる。ただし、$k > 0$ とする。この場合に $\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to 0} Q(a,b)$、$Q(0)$、$Q(\infty)$ を求めてみよ。矛盾がないか議論せよ。

3. N 個の電荷 $i = 1, 2, \ldots, N$ の電荷を q_i、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i(t)$、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_i(t)$ とする。電荷密度および電流密度は

   $$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t)) \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \boldsymbol{v}_i(t) \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t))$$

   と表せる。

(a) 上の $\rho(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ の定義式に基づき、これらが連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{j}$$

を満たしていることを示せ。$\boldsymbol{v}_i(t) = d\boldsymbol{r}_i(t)/dt$ に注意せよ。

(b) (a) の結果から、ある閉じた領域 V に含まれる全電荷 $Q(t)$ の時間変化は

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\int d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{j}$$

と表せることを示せ。ただし右辺の面積分は、領域 V を囲む表面とする。