2018/05/15 出題

電磁気学 1 演義 第 5 回
アドバンストクラス追加問題

1. 空間の静止した 1 点あるいは微小領域に孤立した荷電粒子を長時間保持することを考えよう．このような装置は「イオントラップ」と呼ばれ，(反粒子も含め) 様々な荷電粒子の性質を詳細に調べるために用いられる．Earnshow の定理によれば，静電場ではイオントラップを実現することはできない．ここでは，時間的に変化する電場を用いて，Earnshow の定理の制約を越えることを考える．このようなイオントラップは「RF トラップ」(または Paul トラップ) と呼ばれる．

   (a) まず準備として，1 次元の問題を考える．(この部分は，ランダウ・リフシッツ「力学」§30 を参照のこと．) 電場が $E(x,t) = E_0(x) + E_\Omega(x)\cos\Omega t$ で与えられているとする．角振動数 Ω は十分に大きく，1 周期の間の $E_0(x)$ による電荷 Q の変位は小さいとする．期待される運動はなめらかな運動 $X(t)$ に振動数 Ω の微小な振動 $\xi(t)$ が加わったものである．つまり，$x(t) = X(t) + \xi(t)$ と書ける．ξ の 1 次までで，質量 M の電荷 Q の運動方程式が

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{Q}{M}\left[E_0(X) + \xi\frac{dE_0}{dX} + E_\Omega(X)\cos\Omega t + \xi\frac{dE_\Omega}{dX}\cos\Omega t\right] \tag{1}$$

   と書けることを確かめよ．

   (b) 速い振動項となめらかな運動は，別々に運動方程式を満すはずである．式 (1) の両辺で速く振動する項を同定し，最低次の近似で ξ の運動方程式を導け．(ヒント: 右辺では，ξ は微小量なので無視できる．一方，ξ の時間微分は大きな振動数 Ω がかかるので微小量ではない．)

   (c) 上で得られた ξ の運動方程式の解は，

$$\xi(t) = -\frac{Q}{M\Omega^2}E_\Omega(X)\cos\Omega t \tag{2}$$

   となる．これを式 (1) に代入し，1 周期 $2\pi/\Omega$ で平均することで，$X(t)$ の運動方程式が，

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{Q}{M}E_0(X) - \frac{Q^2}{4M^2\Omega^2}\frac{d}{dX}E_\Omega^2(X) \tag{3}$$

   となることを示せ．この結果から，

$$E_0(X) = -\frac{d}{dX}\Phi_0(X) \tag{4}$$

   と置くと，微細な振動を除くと，電荷 Q の運動が有効ポテンシャル

$$\Phi_{\text{eff}}(X) = \Phi_0(X) + \frac{Q}{4M\Omega^2}E_\Omega^2(X) \tag{5}$$

   によって決定されることが分かる．また，3 次元への拡張も自明である．(X，E_Ω をベクトルとすればよい．)

(d) 前回のリング電極とエンドキャップ電極で作られる電場を考え，電極間に交流電圧を印加する．ポテンシャルは

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = -V_0 \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2d^2} \cos \Omega t \tag{6}$$

と書ける．このときの有効ポテンシャル $\Phi_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{X})$ を求め，電荷 Q のポテンシャルエネルギーが原点で極小値をとることを確かめよ．(ヒント: 電場の振動しない成分はないから $\Phi_0 = 0$．$\boldsymbol{E}_\Omega$ は式 (6) から求める．)

(e) $R_0 = 2z_0$ とすると，有効ポテンシャルの電極上の $z = 0$ での値と，$R = 0$ での値が等しくなることを示せ．また，H^+ イオン (陽子) について，$d = 1$ cm，$V_0 = 100$ V，$\Omega = 2\pi \times 100$ MHz としてその数値 (トラップポテンシャルの深さ) を有効数字 2 桁で求めよ．

W. Paul はイオントラップ技術の開発により，1989 年にノーベル物理学賞を受賞した．