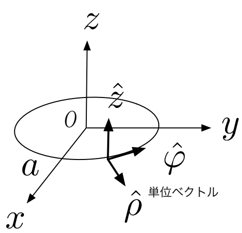
電磁気学１演義　　　　　　　第６回　2017年５月23日

ある領域Vにおける電流密度場を$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$とすると、その磁気双極子モーメント$\boldsymbol{m}$およびそれによって出来る磁場のベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$は以下のように書ける。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{m}\times\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \qquad \boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int dV'(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \tag{1}$$

ここで$\boldsymbol{r_0}$はこの領域の中にとった点であるが、$\int dV'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})$は0なので、$\boldsymbol{m}$は$\boldsymbol{r_0}$の取り方に依存しない。

1. 半径aの円形のリング上を強さIの電流が流れている。この系の磁気双極子モーメント$\boldsymbol{m}$を求めよ。(ベクトルであることに注意) 図のようにリングに対してz軸が垂直になる円筒座標系(ρ,φ,z)を取れば、体積積分は$\int dV\ldots = \int \rho d\rho d\phi dz\ldots$、電流密度は$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = I\delta(\rho-a)\delta(z)\hat{\varphi}$と表せる。



$$\hat{\rho}\times\hat{\varphi}=\hat{z} \qquad \hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$$
$$\hat{\varphi}\times\hat{z}=\hat{\rho} \qquad \hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$$
$$\hat{z}\times\hat{\rho}=\hat{\varphi} \qquad \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$$

$$\hat{\rho}=\cos(\varphi)\hat{x}+\sin(\varphi)\hat{y}$$
$$\hat{\varphi}=-\sin(\varphi)\hat{x}+\cos(\varphi)\hat{y}$$
$$\hat{z}=\hat{z}$$

2. ある電流分布の「雲」があり、磁気双極子モーメント$\boldsymbol{m}$を持っている。

   (a) ベクトルポテンシャルを$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$を求めよ。$\boldsymbol{m}$の方向を$z$軸とする。結果は、円筒座標系で表示せよ。(4重極子を含む高次の項は無視する。)

   (b) 磁場$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$を求めよ。円筒座標系でのrotationの公式は以下のようである。$\boldsymbol{A} = A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}$として、

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)$$

3. z軸に垂直な2つの平面1,2の上を電流がx方向に流れている。平面1,2はそれぞれ$z=z_1,z_2$にあり、$z_2>z_1$とする。それぞれの上で、電流に直交する直線(つまりy方向の直線)を、単位長さあたりK_1, K_2の電流が通過している。(電流の向きは$+x$方向を正とする。)

   (a) 平面1,2上の電流が作る磁場をそれぞれ求めよ。２つの平面は無限に広いとして良い。(ヒント：No5-3の結果を使って良い。)

(b) これらの重ね合わせから全体の磁場を求よ。

(c) 2 つの平面によって空間は 3 つの部分に分けられている。それぞれにおける Maxwell 応力テンソル $T_{\mu\nu} = (1/\mu_0)[B_\mu B_\nu - (1/2)\delta_{\mu,\nu}|\boldsymbol{B}|^2]$ の各成分を求めよ。

(d) 平面 1 および平面 2 の単位面積あたりの部分が受ける力をアンペールの法則から求めよ。

(e) Maxwell 応力テンソルを用いて d) と同じ結果が得られることを示せ。