物理数学 2 演習 第 9 回

1. 次の式を示せ.

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n J_0(x)$$

ヒント :数学的帰納法および第 7 回の 1e を用いよ。

2. (a) 第 7 回の 1e から次の式を導け.

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{2}$$

(b) 式 (1),(2) を用いて $J_n(x)$ の連続した 2 つの正のゼロ点の間には $J_{n-1}(x)$ および $J_{n+1}(x)$ のゼロ点がそれぞれ 1 つだけあることを示せ.

3. ベッセル関数の母関数の積を用いて、引き数が実数の場合に成り立つ以下の不等式を示せ。

$$|J_0(x)| \leq 1, \quad と \quad |J_n(x)| \leq 1/\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

4. (a)

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta\ d\theta$$

(b)

$$\frac{1-\cos x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\theta) d\theta$$

を証明せよ。ヒント :ベッセル関数の級数展開を用いよ。

5. 以下の、ベッセル関数の積分表示を示せ。

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &= \frac{2}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos\left(x\sin\theta\right)\cos^{2\nu}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi} \cos\left(x\cos\theta\right)\sin^{2\nu}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi} e^{\pm ix\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{\pm ipx}\left(1-p^2\right)^{\nu-1/2} dp
\end{aligned}$$